MỤC LỤC

PHẦN I : MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong chương trình toán trung học phổ thông có trình bày phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Các hàm số trong chương trình phổ thông thường được cho dưới dạng là biểu thức của một biến nên việc giải quyết bài toán đó không mấy khó khăn. Tuy nhiên, trong nội dung thi đại học hay trong các bài thi học sinh giỏi, các biểu thức thường cho từ 2 biến trở lên hơn nữa lại có điều kiện kèm theo nên học sinh thường lúng túng khi gặp các bài toán dạng này. Nếu chúng ta có thể chuyển biểu thức nhiều biến thành biểu thức 1 biến thì ta có thể dễ dàng giải quyết bài toán. Chính vì lý do trên nên chúng tôi chọn đề tài:

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA CÁC BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG

2. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu một số vấn đề liên quan đến phương pháp hàm số tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất được trình bày trong một số sách tham khảo, đề thi đại học, đề thi học sinh giỏi nhằm nâng cao nghiệp vụ chuyên môn và rút kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy. Với mục đích giúp các thầy cô giáo giảng dạy có hiệu quả và các em học sinh có được cái nhìn tổng quan, hiểu được bản chất của mỗi vấn đề đặt ra, từ đó đưa ra phương pháp giải mạch lạc phù hợp với mỗi bài toán. Sau khi đề tài được thực hiện, qua việc hướng dẫn phương pháp chung và giải một số bài tập mẫu học sinh có thể vận dụng giải những bài tập liên quan giúp học sinh thuận tiện hơn trong quá trình học và quá trình ôn tập củng cố kiến thức chuẩn bị cho các kỳ thi quan trọng.

3. Đối tượng nghiên cứu

Học sinh khối 12, học sinh ôn thi đại học, đội tuyển học sinh giỏi.

4. Giới hạn phạm vi và nội dung nghiên cứu

Phạm vi nghiên cứu: Nội dung chương trình toán THPT.

Giới hạn đề tài: Chỉ giải quyết các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức đối xứng của 2 biến hoặc 3 biến.

5. Áp dụng đề tài:

Đội tuyển học sinh giỏi khối 12 – Năm học 2012 – 2013.

6. *Nhiệm vụ của đề tài*

- Trang bị cho học sinh những kiến thức cơ bản, vững vàng khi giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức đối xứng.

- Chỉ ra phương pháp để giải quyết một số lớp các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

7. *Phương pháp nghiên cứu*

- Nghiên cứu lý thuyết qua sách giáo khoa, tài liệu tham khảo.
- Điều tra, khảo sát thực tế học sinh.
- Trao đổi cùng các đồng nghiệp trong tổ chuyên môn, tích lũy đúc rút kinh nghiệm qua quá trình giảng dạy.

8. *Thời gian nghiên cứu*

Trong suốt quá trình được phân công giảng dạy các đội tuyển học sinh giỏi của trường từ năm 2010 đến nay.

9. Kết quả nghiên cứu

Kết quả khảo sát đội tuyển học sinh giỏi khối 12 năm học 2012-2013 trước và sau khi chúng tôi triển khai đề tài này.

Kết quả đạt được	Trước khi bồi dưỡng		Sau khi bồi dưỡng	
	Số lượng	Phần trăm	Số lượng	Phần trăm
Giỏi	1	6.25%	6	37.5%
Khá	3	18.75%	5	31.25%
Tb	6	37.5%	5	31.25%
Yếu	6	37. 5%		
Kém				

Phần thứ 2: NỘI DUNG

Chương I: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhất biến

1.1 Khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của 1 biểu thức nhất biến

1.1.1. Giá trị lớn nhất của hàm số (GTLN)

- **Định nghĩa 1:** Cho hàm số y = f(x) xác định trên D $\subset$ R. Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số y = f(x) trên D nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

  1) f(x) $\leq$ M với mọi x $\in$ D.
  2) Tồn tại $x_0 \in$ D sao cho f(x_0) = M.

  Kí hiệu: $\underset{x\in D}{Max} f(x) = M$.

- **Ví dụ 1:** Cho hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ xác định trên R. Ta có $y = -(x-1)^2 + 4 \leq 4$ với mọi x$\in$ R và y(1) = 4 nên giá trị lớn nhất của hàm số trên bằng 4.

1.1.2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số (GTNN)

- **Định nghĩa 2:** Cho hàm số y = f(x) xác định trên D $\subset$ R. Số thực m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(x) trên D nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

  1) f(x) $\geq$ m với mọi x $\in$ D.
  2) Tồn tại $x_0 \in$ D sao cho f(x_0) = m.

  Kí hiệu: $\underset{x\in D}{Min} f(x) = m$.

- **Ví dụ 2:** Cho hàm số $y = x^2 + 2x + 3$ xác định trên R. Ta có $y = (x+1)^2 + 2 \geq 2$ với mọi x$\in$ R và y(-1) = 2 nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên bằng 2.

Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số f (mà không nói rõ trên D) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên tập xác định của nó.

Từ sau mục này, trong nội dung sáng kiến kinh nghiệm (SKKN), chúng tôi sẽ viết tắt giá trị lớn nhất là GTLN và giá trị nhỏ nhất là GTNN.

1.2 Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhất biến

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số y = f(x) trên một tập hợp D. Phương pháp đó gồm các bước sau:

1) Bước 1: Lập bảng biến thiên của hàm số y = f(x) trên D.
2) Bước 2: Dựa vào bảng biến thiên kết luận GTLN, GTNN.

• **Ví dụ 3:** Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x^3 - 3x+1$ trên đoạn [-2; 2]

Giải: Ta có $y' = 3x^2 - 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x+1$ trên đoạn [-2; 2]

x	-2		-1		1		2
y'		+	0	-	0	+	
y	1	↗	3	↘	-1	↗	3

Từ bảng biến thiên, ta được $\underset{x\in[-2;2]}{Max}\, y = y(-1) = y(2) = 3$, $\underset{x\in[-2;2]}{Min}\, y = y(1) = -1$.

Chú ý 1: Nếu bài toán yêu cầu tìm GTLN, GTNN của hàm số mà không nói rõ trên tập hợp D thì ta phải tìm tập xác định của hàm số.

• **Ví dụ 4:** Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$

Giải: Tập xác định của hàm số: D = [-2; 2]

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$ trên đoạn [-2; 2]

x	-2		$\sqrt{2}$		2
y'	||	+	0	-	||
y	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

Từ bảng biến thiên, ta được $\underset{x\in[-2;2]}{Max}\, y = y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, $\underset{x\in[-2;2]}{Min}\, y = y(-2) = -2$.

Chú ý 2: Một số bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số mà hàm số phức tạp, ta có thể đặt ẩn phụ đưa hàm số ban đầu về hàm số đơn giản hơn. Khi đó cần lưu ý tìm điều kiện của ẩn mới.

1.3 Phương pháp đặt ẩn phụ tìm GTLN, GTNN của biểu thức nhất biến.

Bài toán: Tìm GTLN, GTNN của hàm số y = f(u(x)) với $x \in$ D.

Cách giải: Bước 1: Đặt u = u(x)

Bước 2: Từ điều kiện $x \in$ D suy ra điều kiện của ẩn mới $u \in$ D'

Bước 3: Tìm GTLN, GTNN của hàm số y = f(u) với $u \in$ D'.

Bước 4: Kết luận.

• **Ví dụ 5:** Tìm GTLN, GTNN của hàm số y = $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{1-x^4}+2$

Nhận xét: Trong bài toán trên, nếu ta không đặt ẩn phụ mà lập luôn bảng biến thiên của hàm số đó thì dẫn đến 1 lời giải khá dài và phức tạp. Cách giải bài toán trên như sau:

Giải: Tập xác định của hàm số: D = [-1; 1]

Đặt t = $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}$. Bằng cách lập bảng biến thiên của hàm số

y = $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}$ trên đoạn [-1; 1] ta tìm được t $\in$ [$\sqrt{2};2$].

Ta có t = $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^4}=t^2-2$. Khi đó, hàm số ban đầu trở thành y = t^2 + t, với t $\in$ [$\sqrt{2};2$].

Bảng biến thiên của hàm số y = t^2 + t, với t $\in$ [$\sqrt{2};2$]

x	$\sqrt{2}$		2
y'		+	
y	$2+\sqrt{2}$	↗	6

Vậy $\underset{x\in[-1;1]}{Max}\, y = y(0) = 6$; $\underset{x\in[-1;1]}{Min}\, y = y(-1) = y(1) = 2+\sqrt{2}$.

1.4 Bài Tập. Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau :

1) y = $3x^2 - 6x + 2$ trên đoạn [-2; 4]

2) y = x + $\sqrt{9-x^2}$

3) y = sin 2x – x trên đoạn $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$

4) y = $3\cos^2 x - 6\cos x + 1$

5) y = $\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}+2\sqrt{16-x^4}$

6) y = $-2x^2+x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}$ trên đoạn [1; 2]

7) y = $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}$

8) y = $\sqrt{1+x}+\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x-x^2}$

9) y = $x+x^2+x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ trên đoạn [1; 2]

Chương II: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến

2.1 Khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của 1 biểu thức nhiều biến

2.1.1 Giá trị lớn nhất của hàm số (GTLN)

- **Định nghĩa 3:** Cho hàm số y = f($x_1, x_2, x_3, ..., x_n$) xác định trên D $\subset$ R^n. Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số y = f($x_1, x_2, x_3, ..., x_n$) trên D nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:
  1) f($x_1, x_2, x_3, ..., x_n$) $\le$ M với mọi ($x_1, x_2, x_3, ..., x_n$) $\in$ D.
  2) Tồn tại ($x_1^0, x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0$) $\in$ D sao cho f($x_1^0, x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0$)= M.
- Kí hiệu: $\underset{(x_1,x_2,x_3,...,x_n)\in D}{Max} f(x) = M$.

2.1.2 Giá trị nhỏ nhất của hàm số (GTNN)

- **Định nghĩa 4:** Cho hàm số y = f($x_1, x_2, x_3, ..., x_n$) xác định trên D $\subset$ R^n. Số thực m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f($x_1, x_2, x_3, ..., x_n$) trên D nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:
  1) f($x_1, x_2, x_3, ..., x_n$) $\ge$ m với mọi ($x_1, x_2, x_3, ..., x_n$) $\in$ D.
  2) Tồn tại ($x_1^0, x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0$) $\in$ D sao cho f($x_1^0, x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0$)= m.
- Kí hiệu: $\underset{(x_1,x_2,x_3,...,x_n)\in D}{Min} f(x) = M$.

Trong giới hạn sáng kiến kinh nghiệm này, chúng tôi chỉ dừng lại ở mức độ tìm GTLN, GTNN của các hàm số 2 biến, hoặc 3 biến. Hơn nữa, chúng tôi cũng chỉ nghiên cứu các biểu thức nhiều biến có thể đưa được về 1 biến, sau đó dùng phương pháp hàm số để tìm GTLN, GTNN.

2.2 GTLN, GTNN của biểu thức 2 biến đối xứng

2.2.1 Các ví dụ

- **Định Nghĩa 5:** Biểu thức f(x, y) xác định trên tập $D \subset R^2$ được gọi là đối xứng đối với hai biến x, y trên D^2 nếu f(x, y) = f(y, x) với mọi $(x, y) \in D^2$ (sau này ta nói đơn giản là biểu thức đối xứng).
- **Ví dụ 6:** a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$ là biểu thức đối xứng.

  b) $f(x, y) = x^2 - y^2 + x + y$ không phải là biểu thức đối xứng.

Phần tiếp theo trong mục này, chúng tôi trình bày các bài toán tìm GTLN, GTNN của các biểu thức đối xứng theo hai biến x, y. Phương pháp chung để giải các bài toán này là đặt ẩn phụ t theo một biểu thức đối xứng với 2 biến x, y. Thông thường, ta có các cách đặt sau: $t = x + y$, $t = x^2 + y^2$, $t = xy$, . . . Từ đó xét hàm số theo biến t và tìm GTLN, GTNN của hàm số đó. Ta cần nhớ bất đẳng thức liên hệ giữa các biểu thức đối xứng trên là:

$$4xy \le (x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$$

Dựa vào các bất đẳng thức trên và giả thiết để tìm điều kiện của t. Sau đây, chúng tôi trình bày một số ví dụ minh họa. Trong đó, chúng tôi luôn dùng chữ t làm biến mới và luôn đặt P là biểu thức cần tìm GTLN, GTNN. Cách trình bày lời giải của các bài toán dưới đây chia làm 3 bước:

Bước 1: Đặt ẩn t, dựa vào giả thiết tìm điều kiện của t.

Bước 2: Biểu diễn biểu thức P theo biến t.

Bước 3: Xét hàm số, lập bảng biến thiên và kết luận về GTLN, GTNN của P.

- **Ví dụ 7:** Cho hai số thực x, y thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \text{ và } x + y \neq -1.$$

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = \dfrac{xy}{x+y+1}$.

Giải: Đặt t = x + y. Từ giả thiết ta có xy = $(x + y)^2 - (x + y) - 1 = t^2 - t - 1$.

Kết hợp giả thiết trên với bất đẳng thức: $4xy \le (x+y)^2$ ta có:

$$3t^2 - 4t - 4 \le 0 \text{ hay } t \in [\frac{-2}{3};2]$$

Khi đó, ta có P = $\dfrac{t^2 - t - 1}{t+1}$ với $t \in [\frac{-2}{3};2]$.

Lập bảng biến thiên của hàm số f(t) = $\dfrac{t^2 - t - 1}{t+1}$ với $t \in [\frac{-2}{3};2]$ ta tìm được

Max P = $\dfrac{1}{3}$ xảy ra khi x = y = $\dfrac{-1}{3}$ hoặc x = y = 1.

Min P = -1 xảy ra khi (x; y) = (-1;1) hoặc (x; y) = (1; -1).

- **Ví dụ 8:** Cho x, y thỏa mãn điều kiện $(x + y)^3 + 4xy \ge 2$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

Giải: Đặt t = $x^2 + y^2$

Từ giả thiết ta có $(x + y)^3 + 4xy \ge 2$, kết hợp bất đẳng thức $(x + y)^2 \ge 4xy$ suy ra

$$(x + y)^3 + (x + y)^2 - 2 \ge 0 \text{ hay } x + y \ge 1.$$

Mặt khác, ta có $x^2 + y^2 \ge \dfrac{(x+y)^2}{2}$ nên $t \ge \dfrac{1}{2}$.

Ta có $P = 3(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$, kết hợp bất đẳng thức

$$(x^2 + y^2)^2 \ge 4x^2y^2 \text{ suy ra } P \ge 3t^2 - \frac{3}{4}t^2 - 2t + 1 \text{ hay } P \ge \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1.$$

Xét hàm số f(t) = $\dfrac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ với $t \ge \dfrac{1}{2}$. Bằng cách lập bảng biến thiên ta

tìm được Min P = $\dfrac{9}{16}$ xảy ra khi x = y = $\dfrac{1}{2}$.

- **Ví dụ 9:** Tìm GTLN, GTNN của

$$P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} + 4\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 6$$

Trong đó x, y là các số thực dương thỏa mãn $x^2 - 3xy + 2y^2 \le 0$.

Giải: Đặt t = $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

Từ điều kiện $x^2 - 3xy + 2y^2 \le 0$ và x, y là các số dương ta tìm được $\frac{x}{y} \in [1; 2]$

Đặt u = $\frac{x}{y}$, ta được t = $u+\frac{1}{u}$ với u $\in$ [1; 2]. Từ đó suy ra t $\in \left[2;\frac{5}{2}\right]$. Ta có

$$P = \left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)^2 - 2 + 4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2 - 8 + \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + 6$$

$$= \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^4 + \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) = t^4 + t$$

Xét hàm số $f(t) = t^4 + t$ với t $\in \left[2;\frac{5}{2}\right]$.

Bằng cách lập bảng biến thiên ta tìm được

Max P = $\frac{665}{16}$ xảy ra khi x = 2y > 0

Min P = 18 xảy ra khi x = y > 0

2.2.2 Bài tập

1) Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + 2xy \le 32 .$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + 3(xy - 1)(x + y - 2)$.

2) Cho x, y là các số thực thỏa mãn x + y = 4xy và $0 < x, y \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy$.

3) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$$2(x^2 + y^2) + xy = (x + y)(xy + 2).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)$.

4) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

5) Cho x, y dương thỏa mãn x + y + 1 = 3xy. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3x}{y(x+1)} + \frac{3y}{x(y+1)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

6) Cho x, y là các số thực không âm và thỏa mãn x + y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

7) Cho hai số thực x, y khác 0 và thỏa mãn điều kiện

$$(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$

8) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 > 0$ và x + y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{z^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{y^2 + 1} + \frac{y^2}{x^2 + 1}$.

9) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

10) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2(x^2 + y^2) = xy + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 3x^2y^2$.

2.3 GTLN, GTNN của biểu thức 3 biến đối xứng

Phần tiếp theo trong mục này, chúng tôi trình bày các bài toán tìm GTLN, GTNN của các biểu thức đối xứng theo ba biến x, y, z. Một số phương pháp chúng tôi sử dụng để giải các bài toán này là:

1) Đặt ẩn phụ t theo một biểu thức đối xứng với 3 biến x, y, z;

2) Biểu thức đối xứng theo 3 biến nên ta có thể giả sử x = min{x, y, z} hoặc x = max{x, y, z} sau đó biến đổi biểu thức về 1 biến x. Ta cần nhớ đẳng thức và bất đẳng thức liên hệ giữa các biểu thức đối xứng sau:

1) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

2) $3(xy + yz + zx) \le (x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$

Ngoài ra, trong các bài toán được trình bày dưới đây chúng tôi còn sử dụng thêm các công cụ hỗ trợ như: bất đẳng thức AM-GM, Cauchy-Schwarz.

2.3.1 Phương pháp đổi biến t bằng một biểu thức đối xứng của x, y, z

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu một số ví dụ giải bằng phương pháp đặt ẩn t là 1 biểu thức đối xứng của x, y, z. Chẳng hạn t = x + y + z, t = xy + yz + zx , . . .

- **Ví dụ 10:** Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = x + y + z + xy + yz + zx.

Giải: Đặt t = x + y + z

Áp dụng bất đẳng thức cauchy – schwarz ta có

$(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$

Mà theo giả thiết ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ suy ra

$(x + y + z)^2 \le 9$ hay $-3 \le t \le 3$

Mặt khác, ta có

$$P = x + y + z + \frac{1}{2}\,[(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] = \frac{1}{2}(t^2 + 2t - 3).$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 2t - 3)$ với $t \in [-3;3]$

Bằng cách lập bảng biến thiên ta có

Max P = 6 xảy ra khi x= y = z = 1

Min P = -2 xảy ra khi (x, y, z) = (1, -1, -1) và các hoán vị của nó.

- **Ví dụ 11:** Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn x + y + z = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 3(xy + yz + zx) + 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức cauchy – schwarz ta có

$$3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \ge (xy + yz + zx)^2$$

Và ta lại có

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 1 - 2(xy + yz + zx)$$

Từ đó suy ra

$$P \ge (xy + yz + zx)^2 + 3(xy + yz + zx) + 2\sqrt{1 - 2(xy + yz + zx)}$$

Đặt t = xy + yz + zx, Ta có $0 \le xy + yz + zx \le \frac{(x + y + z)^2}{3} = \frac{1}{3}$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1-2t}$ với $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, ta có $f'(t) = 2t + 3 - \frac{2}{\sqrt{1-2t}}$

f''(t) = 2 - $\frac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}} \le 0$, dấu bằng chỉ xảy ra tại t = 0

và f'(t) liên tục trên $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ nên f'(t) nghịch biến trên $\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

Do đó trên đoạn $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ ta có f'(t) ≥ f' $\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3} - 2\sqrt{3} > 0$, suy ra f(t) đồng biến trên đoạn $\left[0,\frac{1}{3}\right]$. Do đó f(t) ≥ f(0) = 2 với mọi t $\in \left[0,\frac{1}{3}\right]$.

Suy ra P ≥ f(t) ≥ 2 với mọi t $\in \left[0,\frac{1}{3}\right]$. P = 2 xảy ra khi (x; y; z) là (1; 0; 0) và các hoán vị của nó. Vậy Min P = 2.

- **Ví dụ 12:** Cho x, y, z là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{x+y+z+1} - \frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

Giải: Đặt t = x + y + z. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz

$$xy + yz + zx \le \frac{(x+y+z)^2}{3} \text{ và } xyz \le \frac{(x+y+z)^3}{27}$$

Từ đó suy ra

$$P = \frac{1}{x+y+z+1} - \frac{1}{xyz + (xy+yz+zx) + (x+y+z) + 1} \le \frac{1}{t+1} - \frac{1}{\frac{t^3}{27} + \frac{t^2}{3} + t + 1}$$

Suy ra

$$P \le \frac{1}{t+1} - \frac{27}{(t+1)^3}$$

Xét hàm số f(t) = $\frac{1}{t+1} - \frac{27}{(t+1)^3}$ với t $\in [0;+\infty]$

Bằng cách lập bảng biến thiên ta tìm được MaxP = $\frac{1}{8}$ xảy ra khi x = y = z = 1.

2.3.2 Phương pháp chọn phần tử đại diện

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu một số ví dụ giải bằng cách chọn phần tử đại diện. Các ví dụ chúng tôi trình bày trong mục này đều là các biểu thức đối xứng theo 3 biến x, y, z nên vai trò của x, y, z bình đẳng với nhau. Do đó, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử x = max{x, y, z} hoặc x =Min{x, y, z}. Sau đó, tìm cách đánh giá và biến đổi biểu thức về theo biến x.

- **Ví dụ 13:** Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn x + y + z = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy + yz + zx - 2xyz$$

Giải: Do vai trò của x, y, z như nhau nên ta có thể giả sử **x = min{x, y, z}**. Mặt khác, theo giả thiết x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn x + y + z = 1 nên ta có

$$x \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \text{ và } y + z = 1 - x$$

Áp dụng bất đẳng thức $yz \le \frac{(y+z)^2}{4}$ và 1 – 2x > 0 ta có

$$P = x(y + z) + yz(1 - 2x) \le x(1-x) + (1-2x)\frac{(y+z)^2}{4}$$

Hay $$P \le x(1-x) + (1-2x)\frac{(1-x)^2}{4} = \frac{1}{4}(-2x^3 + x^2 + 1).$$

Xét hàm số f(t) = $-2x^3 + x^2 + 1$ với $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$.

Bằng cách lập bảng biến thiên, ta tìm được

$$\text{Max } P = \frac{7}{27} \text{ xảy ra khi } x = y = z = \frac{1}{3}$$

- **Ví dụ 14:** Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn [1; 3] thỏa mãn x + y + z = 6. Tìm giá trị lớn nhất của $P = x^2 + y^2 + z^2$.

Giải: Do vai trò của x, y, z như nhau nên ta có thể giả sử **x = max{x, y, z}.** Khi đó ta có x thuộc đoạn [2; 3] và y + z = 6 – x.

Khi đó ta có

$$P \le x^2 + y^2 + z^2 + 2(y - 1)(z - 1) = x^2 + (y + z)^2 - 2(y + z) + 2$$

Từ đó suy ra $P \le x^2 + (6 - x)^2 - 2(6 - x) + 2$ hay $P \le 2x^2 - 10x + 26$.

Xét hàm số $f(t) = 2x^2 - 10x + 26$ với x thuộc đoạn [2; 3].

Bằng cách lập bảng biến thiên, ta tìm được Max P = 14 xảy ra khi (x; y; z) bằng (3; 2; 1) hoặc các hoán vị của nó.

2.3.3 Bài tập

1) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn x + y + z = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 + \frac{15}{4}xyz$.

2) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = x + y + z + xy + yz + zx.

3) Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn [0; 2] thỏa mãn x + y + z = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + z^3$.

4) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

5) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn x + y + z = 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz$.

6) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x + y + z = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2(x^3 + y^3 + z^3) + 3(x^2 + y^2 + z^2) + 12xyz$$

7) Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2} + \frac{(2y+z+x)^2}{2y^2+(z+x)^2} + \frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2}$$

8) Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2(x+y+z)^3+3xyz}{(x+y+z)(xy+yz+zx)}$$

9) Cho x, y, z dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - (x+y+z).$$

10) Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn [1; 4]. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

Phần III : KẾT LUẬN VÀ ĐỀ XUẤT HƯỚNG PHÁT TRIỂN

1. Kết luận

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là một vấn đề khá khó, khá phức tạp đối với học sinh, tuy nhiên nếu được học một cách cẩn thận thì vấn đề đó trở nên bình thường và dễ dàng làm được. Qua quá trình tham khảo, học hỏi của các đồng nghiệp đi trước tôi đã sử dụng các dạng toán này để dạy cho học sinh và nhận thấy có hiệu quả cao đối với học sinh. Chính vì vậy người giáo viên cần phải trang bị cho mình những hiểu biết cơ bản và cách nhìn khái quát tổng hợp. Điều đó sẽ giúp cho người giáo viên khi giảng dạy về vấn đề này có được phương pháp truyền tải tốt nhất giúp học sinh tiếp thu có hiệu quả các em học sinh có sự nhìn nhận đúng đắn, đầy đủ, chắc chắn hơn về những bài toán có liên quan.

Mặc dù đã dành nhiều thời gian để nghiên cứu, song nội dung SKKN không tránh khỏi có nhiều thiếu sót. Tôi rất mong nhận được đóng góp của quý thầy cô để SKKN của tôi được hoàn thiện hơn. Tôi xin trân thành cảm ơn!

2. Hướng phát triển của sáng kiến kinh nghiệm

Một số hướng mà chúng tôi còn có thể mở rộng để phát triển hơn nữa đề tài của mình:

- Kết hợp với phương pháp tiếp tuyến đối với các biểu thức là tổng của các số hạng mà mỗi số hạng đó chỉ chứa 1 biến.
- Kết hợp với phương pháp chuẩn hóa đối với các biểu thức đối xứng thuần nhất.
- Kết hợp kỹ thuật đối xứng hóa các biểu thức chưa đối xứng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa Đại số và Giải tích 12 – Nhà xuất bản giáo dục – Năm 2010.

2. Sách giáo khoa Đại số và Giải tích 12 (Nâng cao) – Nhà xuất bản giáo dục - Năm 2010.

3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số - Phan Huy Khải – Nhà xuất bản giáo dục-Năm 2008.

4. SKKN kỹ thuật dồn biến tìm Max, Min – Giáo viên Trần Đình Hiền – Trường THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An- Năm 2011.

5. Đề thi tuyển sinh đại học (từ năm 2002 đến 2013) .

6. Sáng tạo bất đẳng thức – Phạm Kim Hùng

SỞ GD & ĐT ĐỒNG NAI **CỘNG HOÀ XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM**
Đơn vị: THPT Đoàn Kết **Độc lập - tự do - hạnh phúc**

Tân Phú, ngày 15 tháng 02 năm 2015

PHIẾU NHẬN XÉT,ĐÁNH GIÁ SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM
Năm học:2013 - 2014
Tên đề tài:

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA CÁC BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG

Người viết: **Th.S Hoàng Ngọc Huệ**;
Đơn vị: Tổ Toán - Trường THPT Đoàn Kết.
Lĩnh vực:
Quản lí giáo dục ☐ Phương Pháp dạy học bộ môn ☐
Phương pháp giáo dục ☐ Lĩnh vực khác ☐

1.Tính mới

- Có giải pháp hoàn toàn mới ☐
- Có giải pháp cải tiến,đổi mới từ giải pháp đã có ☐

2.Hiệu quả

- Hoàn toàn mới và đã triển khai áp dụng trong toàn nghành có hiệu quả cao: ☐
- Có tính cải tiến hoặc đổi mới từ những giải pháp đã có và đã triển khai áp dụng trong toàn nghành có hiệu quả cao ☐
-Hoàn toàn mới và đã triển khai áp dụng tại đơn vị có hiệu quả cao ☐
-Có tính cải tiến hoặc đổi mới từ những giải pháp đã có và triển khai áp dụng tại đơn vị có hiệu quả cao ☐

3.Khả năng áp dụng

- Cung cấp được các luận cứ khoa học cho việc hoạch định đường lối, chính sách:

Tốt ☐ Khá ☐ Đạt ☐

- Đưa ra các giải pháp khuyến khích có khả năng ứng dụng thực tiễn,dễ thực hiện và dễ đi vào cuộc sống:

Tốt ☐ Khá ☐ Đạt ☐

- Đã được áp dụng trong thực tế đạt hiệu quả hoặc có khả năng áp dụng đạt hiệu quả trong phạm vi rộng:

Tốt ☐ Khá ☐ Đạt ☐

XÁC NHẬN CỦA TỔ CHUYÊN MÔN **HIỆU TRƯỞNG**