HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

Mai Văn Lâm (sưu tầm có chỉnh sửa)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

a) Định nghĩa: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

b) Giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

Tính các định thức: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Xét định thức		Kết quả
$D \neq 0$		*Hệ có nghiệm duy nhất* $\left(x = \dfrac{D_x}{D}; y = \dfrac{D_y}{D}\right)$
$D = 0$	$D_x \neq 0$ *hoặc* $D_y \neq 0$	*Hệ vô nghiệm*
	$D_x = D_y = 0$	*Hệ có vô số nghiệm*

Chú ý: *Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta có thể dùng các cách giải đã biết như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số.*

2. Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn

Nguyên tắc chung để giải các hệ phương trình nhiều ẩn là **khử bớt ẩn** để đưa về các phương trình hay hệ phương trình có số ẩn ít hơn. Để khử bớt ẩn, ta cũng có thể dùng các phương pháp cộng đại số (khử Gauss), phương pháp thế như đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN, BA ẨN.**

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng phương pháp cộng đại số, phương pháp thế, dùng định thức.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{2}x + 4y = -1 \\ 2x + 4\sqrt{2}y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có $D = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -17$, $D_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = 5$, $D_y = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 19$

Suy ra hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\dfrac{D_x}{D}; \dfrac{D_y}{D}\right) = \left(-\dfrac{5}{17}; -\dfrac{19}{17}\right)$

b) Ta có $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -13$, $D_x = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -52$, $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -39$

Suy ra hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\dfrac{D_x}{D}; \dfrac{D_y}{D}\right) = (4; 3)$

c)) Ta có $D = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 4 \\ 2 & 4\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$, $D_x = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 4\sqrt{2} \end{vmatrix} = -4\sqrt{2} - 20 \neq 0$

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm

d) Ta có $D=\begin{vmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 5 & \sqrt{2}\end{vmatrix}=11,\ D_x=\begin{vmatrix}1 & -1\\ \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{vmatrix}=\sqrt{2}+\sqrt{3},\ D_y=\begin{vmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 5 & \sqrt{3}\end{vmatrix}=-2$

Suy ra hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{D_x}{D};\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{11};-\frac{2}{11}\right)$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}(x+3)y-5)=xy\\(x-2)(y+5)=xy\end{cases}$ b) $\begin{cases}|x-y|=\sqrt{2}\\2x-y=-1\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{3(x+y)}{x-y}=-7\\\dfrac{5x-y}{y-x}=\dfrac{5}{3}\end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}xy-5x+3y-15=xy\\xy+5x-2y-10=xy\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-5x+3y=15\\5x-2y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=25\\5x-2y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=12\\y=25\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(12;25)$

b) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}x-y=\pm\sqrt{2}\\2x-y=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\sqrt{2}\\2x-y=-1\end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases}x-y=-\sqrt{2}\\2x-y=-1\end{cases}$ (2)

Ta có $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-\sqrt{2}\\2x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-\sqrt{2}\\y=-1-2\sqrt{2}\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+\sqrt{2}\\2x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-\sqrt{2}\\y=-1+2\sqrt{2}\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $\left(-1-\sqrt{2};-1-2\sqrt{2}\right)$ và $\left(-1-\sqrt{2};-1+2\sqrt{2}\right)$

c) ĐKXĐ: $x\neq y$

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}3(x+y)=-7(x-y)\\3(5x-y)=5(y-x)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}10x-4y=0\\20x-8y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ (không thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=3\\\dfrac{9}{x}-\dfrac{10}{y}=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{6}{x-2y}+\dfrac{2}{x+2y}=3\\\dfrac{3}{x-2y}+\dfrac{4}{x+2y}=-1\end{cases}$

c) $\begin{cases}\dfrac{6x-3}{y-1}-\dfrac{2y}{x+1}=5\\\dfrac{4x-2}{y-1}-\dfrac{4y}{x+1}=2\end{cases}$ d) $\begin{cases}2|x-6|+3|y+1|=5\\5|x-6|-4|y+1|=1\end{cases}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases}x\neq 0\\y\neq 0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{x} \\ v = \dfrac{1}{y} \end{cases}$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} 6u + 5v = 3 \\ 9u - 10v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{3} \\ v = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = (3;5)$.

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} x - 2y \neq 0 \\ x + 2y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{x - 2y} \\ v = \dfrac{1}{x + 2y} \end{cases}$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} 6u + 2v = 3 \\ 3u + 4v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{7}{9} \\ v = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{7}{9} = \dfrac{1}{x - 2y} \\ -\dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{x + 2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = \dfrac{9}{7} \\ x + 2y = -\dfrac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{70} \\ y = -\dfrac{87}{140} \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = \left(\dfrac{3}{70}; -\dfrac{87}{140}\right)$.

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq 1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{2x - 1}{y - 1} \\ v = \dfrac{y}{x + 1} \end{cases}$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} 3u - 2v = 5 \\ 2u - 4v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x - 1}{y - 1} = 2 \\ \dfrac{y}{x + 1} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

d) Đặt $\begin{cases} u = |x - 6| \\ v = |y + 1| \end{cases}, u \geq 0, v \geq 0$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 2u + 3v = 5 \\ 5u - 4v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases}$

Thay vào ta có $\begin{cases} 1 = |x - 6| \\ 1 = |y + 1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 = \pm 1 \\ y + 1 = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = 5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(7;0), (7;-2), (5;0), (5;-2)$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y - 3z = 1 & (1) \\ x - y + 2z = 2 & (2) \\ -x + 2y + 2z = 3 & (3) \end{cases}$

Lời giải

Cách 1(Phương pháp cộng đại số): Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}7y+3z=10\\ y+4z=5\\ -x+2y+z=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}25z=25\\ y+4z=5\\ -x+2y+z=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y;z)=(1;1;1)$.

Cách 2(Phương pháp thế): Ta có $(2)\Leftrightarrow x=y-2z+2$ thế vào (1) ta được

$3(y-2z+2)+y-3z=1\Leftrightarrow 4y-9z=-5$ (*)

$(3)\Leftrightarrow x=2y+2z-3$ thế vào (1) ta được

$3(2y+2z-3)+y-3z=1\Leftrightarrow 3z=10-7y$ thế vào (*) ta được

$4y-3(10-7y)=-5\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=z=1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y;z)=(1;1;1)$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.45: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}3x-y=1\\ 6x-2y=5\end{cases}$ b) $\begin{cases}(\sqrt{2}+1)x+y=\sqrt{2}-1\\ 2x-(\sqrt{2}-1)y=2\sqrt{2}\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{3}{4}x+\dfrac{2}{3}y=16\\ \dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{5}y=11\end{cases}$

Bài 3.46: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}x+2y-3z=2\\ x-3y+z=5\\ x-5y=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x+y-z=1\\ 2x-y+2z=5\\ x-2y-3z=0\end{cases}$

c) $\begin{cases}x+3y+2z=8\\ 2x+y+z=6\\ 3x+y+z=6\end{cases}$ d) $\begin{cases}x-3y+2z=-7\\ -2x+4y+3z=8\\ 3x+y-z=5\end{cases}$

Bài 3.47: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}x+5y=7\\ 3x-2y=4\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{5}{8}\\ \dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{3}{8}\end{cases}$

c) $\begin{cases}2|x+y|-|x-y|=9\\ 3|x+y|+2|x-y|=17\end{cases}$ d) $\begin{cases}4|x+y|+3|x-y|=8\\ 3|x+y|-5|x-y|=6\end{cases}$

➢ **DẠNG TOÁN 2: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.**

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định thức: Tính D, D_x, D_y

- Nếu $D\neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{D_x}{D};\dfrac{D_y}{D}\right)$
- Nếu $D=0$ thì ta xét D_x, D_y

Với $\left[\begin{array}{l}D_x\neq 0\\ D_y\neq 0\end{array}\right.$ khi đó phương trình vô nghiệm

Với $D_x=D_y=0$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm tập nghiệm của hệ phương trình là tập nghiệm của một trong hai phương trình có trong hệ.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải và biện luận hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases}$

Lời giải

Ta có $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 4 & -m \end{vmatrix} = 4 - m^2 = (2-m)(2+m)$

$D_x = \begin{vmatrix} 2m & -1 \\ m+6 & -m \end{vmatrix} = -2m^2 + m + 6 = (2-m)(2m+3)$

$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 4 & m+6 \end{vmatrix} = m^2 - 2m = m(m-2)$

- Với $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{2m+3}{2+m}; -\frac{m}{2m+1}\right)$
- Với $D=0 \Leftrightarrow m = \pm 2$:

+ Khi $m = 2$ ta có $D = D_x = D_y = 0$ nên hệ phương trình có nghiệm là nghiệm của phương trình $2x - y = 4 \Leftrightarrow y = 2x - 4$. Do đó hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = (t; 2t-4)$, $t \in R$.

+ Khi $m = -2$ ta có $D = 0, D_x \neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm

Kết luận

$m \neq 2$ và $m \neq -2$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\frac{2m+3}{2+m}; -\frac{m}{2m+1}\right)$

$m = 2$ hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = (t; 2t-4)$, $t \in R$.

$m = -2$ hệ phương trình vô nghiệm

Ví dụ 2: Giải và biện luận hệ phương trình sau: $\begin{cases} a(x-1) + by = 1 \\ b(x-1) + ay = 1 \end{cases}$

Lời giải

Hệ tương đương: $\begin{cases} ax - a + by = 1 \\ bx - b + ay = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = a + 1 \\ bx + ay = b + 1 \end{cases}$

Ta có: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$D_x = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ b+1 & a \end{vmatrix} = (a-b)(a+b+1)$, $D_y = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ b & b+1 \end{vmatrix} = a - b$

- TH1: Với $D \neq 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \neq -b \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ là $x = \frac{D_x}{D} = \frac{(a-b)(a+b+1)}{(a-b)(a+b)}$; $y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{a+b}$

- TH2: Với $D = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm b$:

+ Khi $a = b$ ta có $D = 0; D_x = 0; D_y = 0$ hệ phương trình có nghiệm là nghiệm của phương trình $a(x-1) + ay = 1$ hay $ax + ay = a + 1$ (*)

Nếu $a = 0$ thì phương trình (*) vô nghiệm, do đó nếu $a \neq 0$ thì (*)$\Leftrightarrow y = \frac{-ax + a + 1}{a}$

Vì vậy hệ phương trình có nghiệm dạng $(x;y) = \left(t; \frac{-at + a + 1}{a}\right)$

+ Khi $a = -b$ ta có $D = 0; D_y = -2b$

Nếu $b \neq 0 \Rightarrow D = 0; D_y \neq 0$ suy ra hệ phương trình vô nghiệm

Nếu $a = b = 0$: Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 0.x + 0.y = 1 \\ 0.x + 0.y = 1 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Kết luận

$a \neq b$ và $a \neq -b$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{a+b+1}{a+b}; \dfrac{1}{a+b}\right)$

$a = b \neq 0$ hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = \left(t; \dfrac{-at+a+1}{a}\right)$

$a = -b$ hệ phương trình vô nghiệm

Ví dụ 3: Tìm m để hệ vô nghiệm $\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3 \\ m(x+y) - y = 2 \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3 \\ mx + (m-2)y = 2 \end{cases}$

Ta có $D = \begin{vmatrix} 2m^2 & 3(m-1) \\ m & m-2 \end{vmatrix} = 2m^3 - 7m^2 + 3m$

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3(m-1) \\ 2 & m-2 \end{vmatrix} = -3m$; $D_y = \begin{vmatrix} 2m^2 & 3 \\ m & 2 \end{vmatrix} = 4m^2 - 3m$

Hệ đã cho vô nghiệm xảy ra trong hai trường hợp sau

TH1: $\begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 7m^2 + 3m = 0 \\ -3m \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m(2m^2 - 7m + 3) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2m^2 - 7m + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

TH2: $\begin{cases} D = 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 7m^2 + 3m = 0 \\ 4m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 0 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ m \neq 0 \\ m \neq \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ vô nghiệm khi $m = 3$ và $m = \dfrac{1}{2}$

Ví dụ 4: Tìm các giá trị của b sao cho với mọi a thì hệ phương trình $\begin{cases} x + 2ay = b \\ ax + (1-a)y = b^2 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2a \\ a & 1-a \end{vmatrix} = 1 - a - 2a^2$

$\Rightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ thì hệ phương trình có nghiệm

Khi $a=-1$, hệ trở thành: $\begin{cases} x-2y=b \\ x-2y=-b^2 \end{cases}$,

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow b=-b^2 \Leftrightarrow b+b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-1 \end{array}\right.$

Khi $a=\dfrac{1}{2}$, hệ trở thành $\begin{cases} x+y=b \\ x+y=2b^2 \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow b=2b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm với mọi $a \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow b=0$

Ví dụ 4: Tùy vào m hãy tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P(x;y)=(x+2my+1)^2+(mx+2y)^2$$

Lời giải

Ta có $P(x;y)\geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+2my+1=0 \\ mx+2y=0 \end{cases}$ (*)

$D=\begin{vmatrix} 1 & 2m \\ m & 2 \end{vmatrix}=2-2m^2$

Nếu $D\neq 0 \Leftrightarrow 2-2m^2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 1$ thì hệ phương trình (*) có nghiệm do đó $\min P(x;y)=0$.

Nếu $D=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Với $m=1$ ta có $P(x;y)=(x+2y+1)^2+(x+2y)^2=2(x+2y)^2+2(x+2y)+1$

$\Rightarrow P(x;y)=2\left(x+2y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\geq \dfrac{1}{2}$

Suy ra $\min P(x;y)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x+2y+\dfrac{1}{2}=0$

Với $m=-1$ ta có $P(x;y)=(x-2y+1)^2+(-x+2y)^2=2(x-2y)^2+2(x-2y)+1$

$\Rightarrow P(x;y)=2\left(x-2y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\geq \dfrac{1}{2}$

Suy ra $\min P(x;y)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x-2y+\dfrac{1}{2}=0$

Vậy $m\neq \pm 1$ thì $\min P(x;y)=0$, $m=\pm 1$ thì $\min P(x;y)=\dfrac{1}{2}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.48: Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx+2y=2m \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (m+1)x-2y=m-1 \\ m^2x-y=m^2+2m \end{cases}$

Bài 3.49: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x+8y=4m\\ mx+(m+3)y=3m-1\end{cases}$ có nghiệm duy nhất

Bài 3.50: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases}-4x+my=m+1\\ (m+6)x+2y=m+3\end{cases}$ có vô số nghiệm:

Bài 3.51: Tùy theo giá trị của m, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P(x;y)=(mx+2y-2m)^2+(x+y-3)^2$$

Bài 3.52: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(2m+1)x-3y=3m-2\\ (m+3)x-(m+1)y=2m\end{cases}$.

a) Tìm m để hệ có nghiệm.

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa mãn $x\geq 2y$.

c) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) sao cho $P=x^2+3y^2$ nhỏ nhất .