MỘT SỐ HIỂU LẦM TRONG GIẢI TOÁN CỦA HỌC SINH

1. Nhầm lẫn tính đúng-sai của mệnh đề.

1.1. Khi mệnh đề: "$A \Rightarrow B$" (nếu có *A* thì có *B*) **đúng**, học sinh có thể ngộ nhận về mệnh đề "$B \Rightarrow A$" (nếu có *B* thì có *A*) **đúng**.

Ví dụ 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = a$ thì hàm số liên tục tại $x = a$. Tuy nhiên, khẳng định sau là **sai**: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = a$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = a$. Chẳng hạn, hàm số $y = |x - a|$ liên tục tại $x = a$ nhưng không có đạo hàm tại $x = a$.

1.2. Khi mệnh đề: "$A \Rightarrow B$" (nếu có *A* thì có *B*) **đúng**, học sinh có thể ngộ nhận về mệnh đề "$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$" (nếu không có *A* thì không có *B*) **đúng**.

Ví dụ 2: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = a$ thì hàm số liên tục tại $x = a$. Tuy nhiên, khẳng định sau là **sai**: Nếu hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x = a$ thì hàm số không liên tục tại $x = a$. Chẳng hạn, hàm số $y = |x - a|$ không có đạo hàm tại $x=a$ nhưng vẫn liên tục tại $x = a$.

1.3. Khi mệnh đề: "$A \Rightarrow B$" (nếu có *A* thì có *B*) **đúng**, học sinh có thể ngộ nhận về mệnh đề "$\overline{A} \Rightarrow B$" (nếu không có *A* thì có *B*) **sai**.

Ví dụ 3: Nếu *z* là số thực thì mô đun của *z* là một số không âm. Khẳng định sau vẫn **đúng**: Nếu *z* không là số thực thì mô đun của *z* là một số không âm.

2. Nhầm lẫn giữa giả thiết trong câu hỏi và giả thiết của các định lí trong sách giáo khoa.

Ví dụ 4: Xét các khẳng định sau:

i) Nếu hàm số $y = f(x)$ xác định trên R thỏa mãn $f(-1).f(0) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành có ít nhất 1 điểm chung.

ii) Nếu hàm số $y = f(x)$ xác định trên R thỏa mãn $f(-1).f(0) < 0$ và $f(0).f(1) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành có ít nhất 2 điểm chung.

Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Khẳng định i) đúng và khẳng định ii) đúng.

B. Khẳng định i) đúng và khẳng định ii) sai.

C. Khẳng định i) sai và khẳng định ii) đúng.

D. Khẳng định i) sai và khẳng định ii) sai.

Đây là một câu hỏi khó, học sinh có thể liên tưởng đến định lí về giá trị trung gian của hàm liên tục khi đọc các giả thiết ở hai khẳng định này. Tuy nhiên, các giả thiết thiếu một điều kiện rất quan trọng là hàm số liên tục. Ta có thể chỉ ra những tình huống để thấy các khẳng định i) và ii) đều **sai.**

Xét hàm $f\left(x\right)=\begin{cases}-1 \text{ khi } x\in \mathrm{R}\setminus\left\{0\right\}\\ 1 \text{ khi } x=0\end{cases}$. Hàm số này không liên tục tại 0.

Ta có $f(-1).f(0)<0,\ \ f(0).f(1)<0$ và đồ thị của hàm số không có điểm chung với Ox. Chọn phương án **D**.

3. Xét thiếu trường hợp trong quá trình tìm ra kết quả cuối cùng.

Ví dụ 5: Tìm m để hàm số $y=mx^3+mx^2+(2m+1)x-1$ đồng biến trên tập xác định.

Học sinh thường hay quên trường hợp $m = 0$ mà chỉ giải bài này trong trường hợp $m\neq 0$, đôi khi học sinh còn lấy cả trường hợp $m<0$ khi dùng định lí về dấu của tam thức bậc 2. Trong bài toán này, $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, $m<0$ chắc chắn không thỏa.

Ví dụ 6: Tập hợp các số thực *m* để hàm số $y=\dfrac{mx^3}{3}-(m+1)x^2+4x-1$ có cực trị là

A. $\mathrm{R}\setminus\left\{1\right\}$. **B.** R **C.** $\mathrm{R}\setminus\left\{0;1\right\}$. **D.** $\mathrm{R}\setminus\left\{0\right\}$.

Trong ví dụ này học sinh dễ quên trường hợp $m = 0$, hàm bậc hai luôn có cực trị, vì vậy $m = 0$ thuộc tập hợp các kết quả.

4. Ngộ nhận về kết quả tổng quát khi mới biết một số trường hợp riêng.

Ví dụ 7: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Khi nhìn mẫu số có 2 nghiệm là 1 và 2, học sinh có thể đưa ra đúng đáp án cho câu hỏi này là đáp án **C**. Trong tình huống này, phương án **C** là phương án đúng vì

$$\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=+\infty,\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=-\infty,\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=+\infty\end{array}.$$

Tuy nhiên số đường tiệm cận đứng của đồ thị **không** phải lúc nào cũng bằng số nghiệm phân biệt của mẫu số. Chẳng hạn câu hỏi sau:

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\sin x}{x^2-x}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Mẫu số có hai nghiệm phân biệt là 0 và 1 nhưng đồ thị không có đường tiệm cận đứng vì:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\sin x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=2-\sqrt{3}$$ khác vô cực;

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\sin x}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x+3-2^2\right)\sin x}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(x-1\right)x}=\frac{\sin 1}{4}$$ khác vô cực.

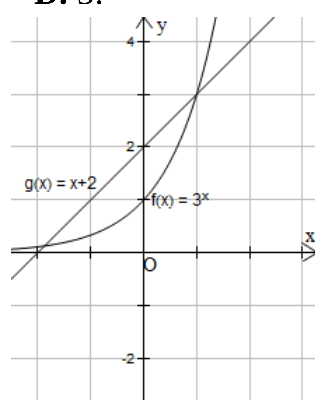
Ví dụ 8: Nếu *a* và *b* là hai số thực thì $|a|=|b|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a=-b\end{array}\right.$.

Khẳng định sau đây là **sai**: Nếu *a* và *b* là hai số phức thì $|a|=|b|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a=-b\end{array}\right.$.

5. Ngộ nhận về tập hợp các kết quả trong khi chỉ tìm được một vài kết quả

Ví dụ 9: Số nghiệm thực của phương trình $3^x=x+2$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.



Trong ví dụ này học sinh tìm được một nghiệm là 1 nhưng không tìm được thêm nghiệm khác và có thể ngộ nhận số nghiệm của phương trình là 1.

Học sinh có thể vẽ đồ thị của các hàm số để thấy số nghiệm của phương trình là 2. Học sinh cũng có thể sử dụng một số loại máy tính để tìm ra số nghiệm của phương trình này.

6. Quên điều kiện dẫn đến thừa kết quả trong bài toán

Ví dụ 10: Số nghiệm thực của phương trình $\dfrac{\log_2(x^2+3x)-2}{\log_2 x}=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Nếu học sinh chỉ chú ý đến điều kiện x > 0 và giải phương trình $\log_2(x^2+3x)-2=0$, có 2 kết quả là $x=-4$ (không thỏa mãn x > 0) và x = 1 thì chọn phương án **B**. Tuy nhiên, $x = 1$ không thỏa mãn điều kiện mẫu số khác 0. Vì vậy phải chọn phương án **A**.

7. Đưa ra điều kiện mới dẫn đến giảm số kết quả trong bài toán

Ví dụ 11: Số nghiệm thực của phương trình $2\log_2(3x+2)=\log_2 x^2$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Vì có hệ số 2 ở vế trái nên học sinh có thể nghĩ ngay đến công thức $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$ khi x dương, học sinh biến đổi về $3x+2=x \Leftrightarrow x=-1$. Giá trị này không thỏa mãn điều kiện để có thể thực hiện được công thức $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$, học sinh có thể kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Sai lầm ở đây là học sinh đưa ra điều kiện mới $x > 0$ để biến đổi và làm mất nghiệm. Lời giải đúng như sau

$$2\log_2(3x+2)=\log_2 x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2>0 \\ x^2>0 \\ \log_2(3x+2)^2=\log_2 x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{-2}{3} \\ x\neq 0 \\ (3x+2)^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{-2}{3} \\ x\neq 0 \\ 8x^2+12x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Học sinh cần phải cảnh giác với những biến đổi dẫn đến phương trình có điều kiện mới khác điều kiện của phương trình ban đầu.

8. Kết quả tính toán khi dùng máy tính bị sai do lỗi người bấm hoặc lỗi của máy.

Học sinh phải thận trọng khi biến đổi biểu thức. Tránh tình trạng quá tin tưởng vào máy tính khi xử lí một biểu thức đã biến đổi sai và yên tâm dùng kết quả tìm được nhờ máy tính.

9. Kiến thức trong sách giáo khoa bị thu hẹp dẫn đến không hiểu tường tận.

Bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thức F = ax + by. Nếu hệ bất phương trình của bài toán có miền nghiệm là 1 đa giác thì F đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác (tại sao không là điểm trên cạnh hay vị trí nào đó). Nếu hệ bất phương trình của bài toán có miền nghiệm không là miền đa giác thì F đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất hay không? Với cách giải sau, ta có thể trả lời được tất cả vấn đề trên chỉ dựa vào cách giải bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 12:

Bác Năm dự định trồng ngô và đậu xanh trên một mảnh đất có diện tích 8 ha. Nếu trồng 1 ha ngô thì cần 20 ngày công và thu được 40 triệu đồng. Nếu trồng 1 ha đậu xanh thì cần 30 ngày công và thu được 50 triệu đồng. Bác Năm cần trồng bao nhiêu hecta cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền nhất? Biết rằng, bác Năm chỉ có thể sử dụng không quá 180 ngày công cho việc trồng ngô và đậu xanh.

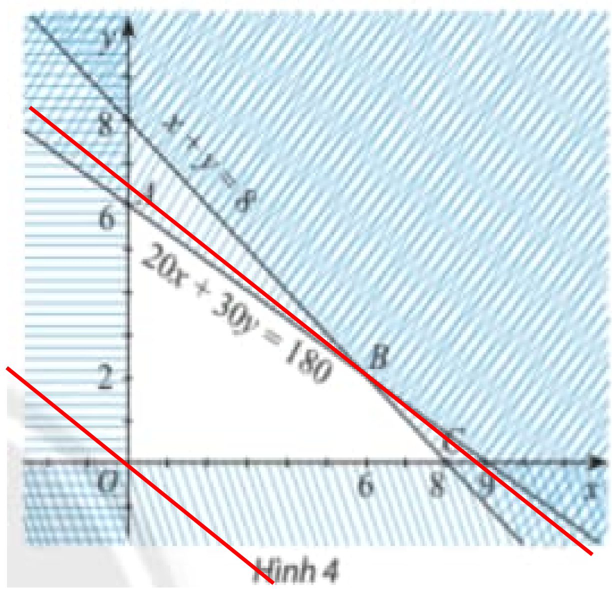
Giải

Gọi x là số hecta đất trồng ngô và y là số hecta đất trồng đậu xanh.

Từ đó, ta có hệ bất phương trình mô tả các điều kiện ràng buộc: $\begin{cases} x + y \le 8 \\ 20x + 30y \le 180 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Gọi F là số tiền (đơn vị: triệu đồng) bác Năm thu được, ta có: F = 40x + 50y.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình này trên hệ trục toạ độ Oxy, ta được miền tứ giác OABC (Hình 4).



Hình 4

Ta vẽ đường thẳng d: 40x + 50y = 0, vẽ d’ song song hoặc trùng d. Nếu d’ cắt miền nghiệm tại 1 đỉnh hoặc trùng 1 cạnh thì F đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất tại (những) điểm đó, ngược lại không đạt. (Nếu miền nghiệm là miền đa giác thì F luôn đạt GTLN và GTNN, miền nghiệm không là miền đa giác thì F có thể chỉ đạt GTLN hoặc GTNN hoặc không có).

Dễ dàng biết F đạt GTLN tại B(6; 2): F=40.6 + 50.2 = 340;

F đạt GTNN tại O(0; 0): F=40.0+50.0=0.

Vậy để thu được nhiều tiền nhất, bác Năm cần trồng 6 ha ngô và 2 ha đậu xanh.

Hết.