SỬ DỤNG SƠ ĐỒ TƯ DUY ĐỂ GIẢI BÀI TẬP GIỚI HẠN HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC NẮM

1. Sơ đồ tính giới hạn của hàm số

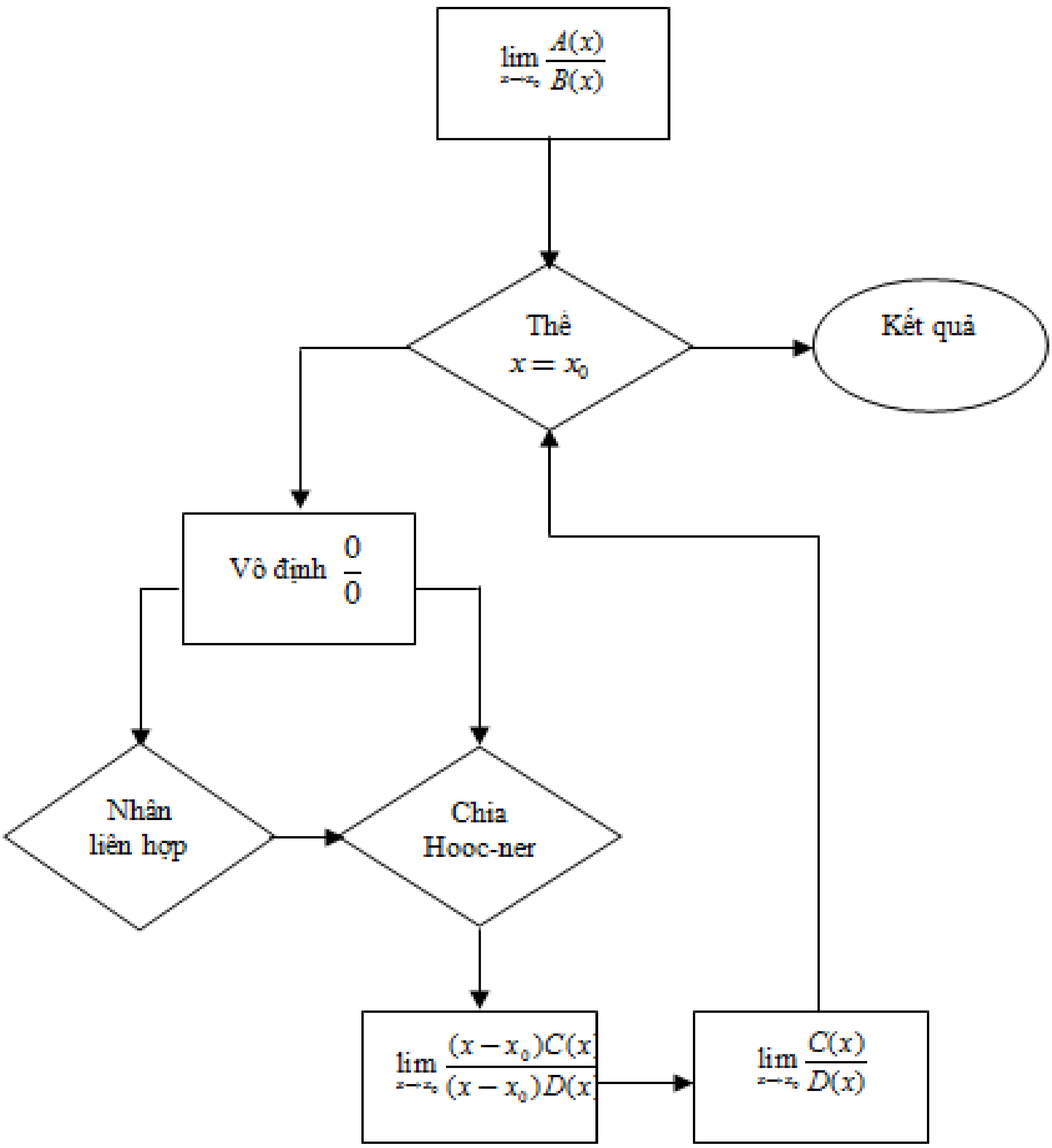
Khi gặp các bài tập về tính giới hạn của hàm số các em học sinh thường hay lúng túng và nhầm lẫn về cách giải quyết vấn đề. Thực ra, các bài tập về tính giới hạn của hàm số thường rơi vào một trong hai dạng (dựa vào ‘‘x tiến về đâu ?’’) như sau:

+ Giới hạn của hàm số khi x tiến về số cụ thể ($\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)}$);

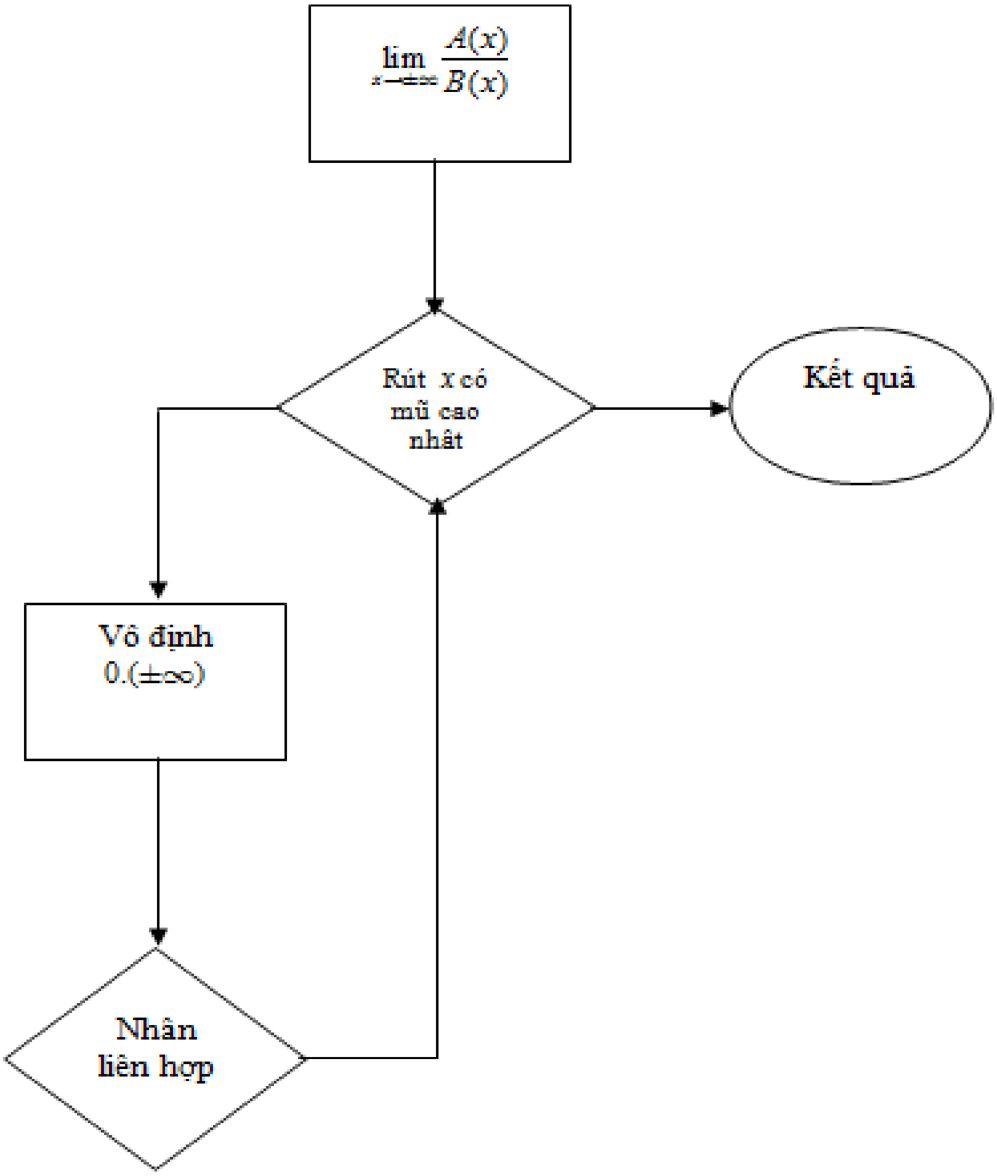
+ Giới hạn của hàm số khi x tiến về vô cực ($\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{A(x)}{B(x)}$).

Và chúng ta có thể dễ dàng giải quyết các bài tập này nếu nắm được hai sơ đồ tương ứng sau đây:

1.1. Giới hạn của hàm số khi x tiến về số cụ thể ($\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)}$)



1.2. Giới hạn của hàm số khi x tiến về vô cực ($\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{A(x)}{B(x)}$)



Đương nhiên chúng ta cũng cần nắm vững các kiến thức sau:

2. Giới hạn đặc biệt: Với C là hằng số, $k\in\mathbb{N}^*$. Ta có :

☺ $\lim\limits_{x\to+\infty}C=C$ ☺ $\lim\limits_{x\to x_0}x^k=x_0^k$ ☺ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$

☺ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2k}=+\infty$ ☺ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2k-1}=-\infty$ ☺ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{C}{x^k}=0$

3. Các dạng vô định: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $+\infty-(+\infty), -\infty-(-\infty)$, $\pm\infty.0$

4. Các quy tắc tính giới hạn đặc biệt

Với c là hằng số, ta có :

☺ $\frac{c}{\pm\infty}\to 0$ ☺ $\frac{c}{0^+}\to+\infty$ (nếu $c>0$) ☺ $\frac{c}{0^-}\to-\infty$ (nếu $c>0$)

☺ $c.(+\infty)\to+\infty$ (nếu $c>0$) ☺ $c.(-\infty)\to-\infty$ (nếu $c>0$)

5. Hằng đẳng thức đáng nhớ

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)\Rightarrow\begin{cases}a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}\ (khi\ a+b\neq 0)\\ a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}\ (khi\ a-b\neq 0)\end{cases}$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\Rightarrow a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\ (khi\ a^2+ab+b^2\neq 0)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\Rightarrow a+b=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}\ (khi\ a^2-ab+b^2\neq 0)$$

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. *Tính các giới hạn sau*

a. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-\sqrt{2+x}}{x-5}$ b. $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{10x^2-x}-3x-2)$ c. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$

d. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^3+x-3}$ e. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}+x+1}{x+3}$ f. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-8}{x^2-4x+4}$

Giải

a. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-\sqrt{2+x}}{x-5}=\dfrac{1-\sqrt{2-1}}{-1-5}=0$

b. $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{10x^2-x}-3x-2)=\sqrt{10.1^2-1}-3.1-2=-2$

c. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}=\dfrac{4^2-3.4+2}{4-3}=6$

d. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^3+x-3}$

(Vì $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^3+x-3}=\dfrac{3.1^2-1-2}{2.1^3+1-3}$: dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nên ta giải theo hướng 2 của sơ đồ như sau)

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{2x^3+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(2x^2+2x+3)}\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x^2+2x+3}=\frac{5}{7}$$

e. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}+x+1}{x+3}$

(Vì $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}+x+1}{x+3}=\dfrac{\sqrt{1+3}-3+1}{-3+3}$: dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nên ta giải theo hướng 2 của sơ đồ như sau)

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{1-x}+x+1}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{1-x-(x+1)^2}{(x+3)(\sqrt{1-x}-x-1)}=\lim_{x\to -3}\frac{-x^2-3x}{(x+3)(\sqrt{1-x}-x-1)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{-x}{(\sqrt{1-x}-x-1)}=\frac{3}{2+3-1}=\frac{3}{4}$$

f. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-8}{x^2-4x+4}$

(Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-8}{x^2-4x+4}=\dfrac{2^3-8}{2^2-4.2+4}$: dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nên ta giải theo hướng 2 của sơ đồ như sau)

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-8}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+2x+4}{x-2}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+2x+4)=12>0$, $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0$, $x-2<0,\forall x<2$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+2x+4}{x-2}=-\infty$

Vậy $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-8}{x^2-4x+4}=-\infty$

Ví dụ 2. *Tính các giới hạn sau*

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-4x+1)$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x-\sqrt{4x^2-x})$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{1-2x}$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{3x+1}$ f. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1-\sqrt{x^2-1})$ e. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-x}-1+2x)$

Giải

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-4x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2})]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2})=3\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2})]=+\infty$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-4x+1)=+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x-\sqrt{4x^2-x})=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x+x\sqrt{4-\dfrac{1}{x}})=\lim\limits_{x\to-\infty}[x(\dfrac{2}{x}-1+\sqrt{4-\dfrac{1}{x}})]$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{2}{x}-1+\sqrt{4-\dfrac{1}{x}})=1\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to-\infty}[x(\dfrac{2}{x}-1+\sqrt{4-\dfrac{1}{x}})]=-\infty$

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x-\sqrt{4x^2-x})=-\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{1-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2})}{x(\dfrac{1}{x}-2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}[x.\dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-2}]$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-2}=-\dfrac{1}{2}$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}[x.\dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-2}]=-\infty$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{1-2x}=-\infty$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}-x}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}-1}{3+\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{2}{3}$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1-\sqrt{x^2-1})$

(Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1-\sqrt{x^2-1})=\lim\limits_{x\to+\infty}[x(1-\frac{1}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})]$: dạng vô định $+\infty.0$ nên ta giải theo hướng 2 của sơ đồ như sau)

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2-(x^2-1)}{x-1+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+2}{x-1+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(-2+\frac{2}{x})}{x(1-\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-2+\frac{2}{x})}{(1-\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})}=-1$$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-x}-1+2x)$

(Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-x}-1+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[x(-\sqrt{4-\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}+2)]$: dạng vô định $-\infty.0$ nên ta giải theo hướng 2 của sơ đồ như sau)

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-x}-1+2x)=\lim_{x\to-\infty}[(\sqrt{4x^2-x}+2x)-1]=\lim_{x\to-\infty}[\frac{4x^2-x-4x^2}{\sqrt{4x^2-x}-2x}-1]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}[\frac{-x}{-x\sqrt{4-\frac{1}{x}}-2x}-1]=\lim_{x\to-\infty}[\frac{-1}{-\sqrt{4-\frac{1}{x}}-2}-1]=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$$

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Tính các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{1-x}+x}{x^2+x}$

2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5+4x}-x-2}{2x^2+x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x+x^2}{x^2-x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-3+\sqrt{9x^2-x}}{1+2x}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-2x+\sqrt{4x^2-x})$

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-1+x)$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt[3]{x^3+1})$

8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+6}-\sqrt{3+x}-1}{x^2-1}$

9. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2-x}-1-3x)$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2-x}-1+3x)$

NGƯỜI VIẾT: TRẦN QUANG TUÂN