VÀI NÉT VỀ PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN – NGUYÊN DƯƠNG

1. Phương trình nghiệm nguyên – nguyên dương nhìn chung không có phương pháp giảI chung cho mọI phương trình mà đa số chúng ta dùng phép chặn (Nhốt thỏ vào lồng) để thu nhỏ miền nghiệm bởI các bất đẳng thức hoặc dùng các tính chất chia hết , số nguyên tố, tính chất đặc biệt của phương trình ….để chọn ra nghiệm thích hợp.

2. Xin giớI thiệu cách giảI chung cho 1 loại. Phương trình thường gặp

$a\sum_{i=2}^{n} x_i + b = c\prod_{i=2}^{n} x_i$ hoặc $\sum_{i=2}^{n}\frac{a}{x_i} = c$ (vớI a , b , c là các số tự nhiên)

2.1 **<u>Phương trình dạng</u>** $a\sum_{i=2}^{n} x_i + b = c\prod_{i=2}^{n} x_i$

\+ Khi n = 2 Ta có a(x + y) + b = c.xy (1)

$$(1) \Leftrightarrow (cx-a)(cy-a) = a^2 + bc = m.n \quad (2)$$

Nên $(2) \Rightarrow \begin{cases} cx-a=m \\ cy-a=n \end{cases}$, $\begin{cases} cx-a=a^2+bc \\ cy-a=1 \end{cases}$ (GiảI hệ và tìm nghiệm thích hợp $x, y \in IN^*$)

Do x , y là bình đẳng nên (x_0 ; y_0) là nghiệm thì (y_0 ; x_0) cũng là nghiệm

\+ Khi n > 2 . Ta viết a($x_1 + x_2 + \ldots + x_n$) + b = c.$x_1.x_2\ldots x_n$ (3)

Do x , y là bình đẳng nên ta giả sử $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge 1$

Ta có $(3) \Leftrightarrow \frac{a}{x_2.x_3..x_n} + \frac{a}{x_1.x_3..x_n} + \ldots + \frac{a}{x_1.x_2..x_{n-1}} + \frac{b}{x_1.x_2\ldots x_n} = c$

Do $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge 1$ Nên

$$\frac{a}{x_2\ldots x_n} \le \frac{a}{x_n^{n-1}}, \ldots\ldots\ldots, \frac{a}{x_1\ldots x_{n-1}} \le \frac{a}{x_n^{n-1}} \quad , \quad \frac{b}{x_1\ldots x_n} \le \frac{b}{x_n^{n-1}}$$

Suy ra $\frac{na+b}{x_n^{n-1}} \ge c \Leftrightarrow \frac{c(na+b)}{c.x_n^{n-1}} \ge \frac{c(na+b)}{na+b} \Rightarrow x_n^{n-1} \le \frac{na+b}{c} \le m \in IN^*$ (4)

Từ (4) tìm được x_n và thay vào PT (3) ta được PT còn n – 1 ẩn x_1 , x_2 , …, x_{n-1}

Tiếp tục các bước như trên để tìm được x_{n-1} , …, x_1

\+ Cần chú ý: + Nếu tìm được x_n = p thì chỉ cần giả sử $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_{n-1} \ge p$

\+ Nếu có bộ nghiệm phân biệt p_1 , p_2 , …., p_n

Thì số nghiệm của PT là n! được hoán vị từ bộ nghiệm trên

2.2 **<u>Phương trình dạng</u>** $\sum_{i=2}^{n}\frac{a}{x_i} = c$ có cách giảI như loạI 1

<u>3. Một số ví dụ</u>

Ví dụ 1:_ tìm nghiệm nguyên dương của PT x + y + z = x.y.z (1)

<u>GiảI:</u> Do x,y,z bình đẳng . Ta giả sử $x \ge y \ge z \ge 1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1 \le \frac{3}{z^2} \Rightarrow z^2 \le 3. \text{ Do } z \in IN^* \text{ nên } z = 1$$

\+ VớI z = 1 thì $(1) \Leftrightarrow x + y + 1 = xy \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 2$

Ta có $\begin{cases} x-1=2 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

\+ Vậy bộ nghiệm là (3 ; 2 ; 1) .Khi đó PT đã cho có 6 nghiệm được hoán vị từ bộ nghiệm

Ví dụ 2:_tìm nghiệm nguyên dương của PT 5(x+y+z+t) + 10 = 2x.y.z.t (2)

<u>GiảI:</u> Do x,y,z bình đẳng . Ta giả sử $x \ge y \ge z \ge t \ge 1$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{5}{2yzt}+\frac{5}{2xzt}+\frac{5}{2xyt}+\frac{5}{2xyz}+\frac{10}{2xyzt}=1 \le \frac{30}{2t^3} \Rightarrow t^3 \le 15 \Rightarrow t \le 2 \Rightarrow t=1 \vee t=2$$

+ **<u>VớI t = 1</u>** Ta có 5(x+y+z) + 15 = 2xyz (3)

$$(3) \Leftrightarrow \frac{5}{2yz}+\frac{5}{2xz}+\frac{5}{2xy}+\frac{15}{2xyz}=1 \le \frac{30}{2z^2} \Rightarrow z^2 \le 15 \Rightarrow z \le 3 \Rightarrow z=1 \vee z=2 \vee z=3$$

++ VớI z = 1 Ta có $5(x+y)+20=2xy \Leftrightarrow (2x-5)(2y-5)=65$

Ta có $\begin{cases} 2x-5=65 \\ 2y-5=1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-5=13 \\ 2y-5=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=35 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=9 \\ y=5 \end{cases}$

Vậy có 2 bộ nghiệm (13 ; 5 ; 1 ; 1) và (9 ; 5 ; 1 ;1) (Nghiệm là các hoán vị của 2 bộ)

++ VớI z = 2 , 3 Phương trình vô nghiệm

+ **<u>VớI t =2</u>** Ta có 5(x+ y + t) + 20 = 4xyz (4)

$$(4) \Leftrightarrow \frac{5}{4yz}+\frac{5}{4xz}+\frac{5}{4xy}+\frac{20}{4xyz}=1 \le \frac{35}{4z^2} \Rightarrow z^2 \le \frac{35}{4} \Rightarrow z^2 < 9$$

Do $x \ge y \ge t = 2$ Nên z = 2 Ta có 5(x+y) + 30 = 8xy $\Leftrightarrow (8x-5)(8y-5) = 265 = 5.53$ (5)

Vì $x \ge y \ge t = 2$ nên $8x-5 \ge 8y-5 \ge 11$ .Vậy PT (5) vô nghiệm

+ <u>Kết luận</u>: có 2 bộ nghiệm (13 ; 5 ; 1 ; 1) và (9 ; 5 ; 1 ;1) .Nghiệm là các hoán vị của 2 bộ

<u>Ví dụ 3</u> : Tìm nghiệm nguyên dương lẻ phân biệt của phương trình

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{563}{315} \quad (1)$$

<u>GiảI:</u> Do x,y,z bình đẳng . Ta giả sử $x > y > z > t > k \ge 1$ (1')

Từ (1) và (1') suy ra $\frac{5}{k} \ge \frac{563}{315} \Rightarrow k \le \frac{5.315}{563} \approx 2{,}7 \Rightarrow k = 1$ (k lẻ)

+ k =1 ta có $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{248}{315}$ (2)

VớI $x > y > z > t > 1$ (2')

Từ (2) và (2') suy ra $\frac{4}{t} \ge \frac{248}{315} \Rightarrow t \le \frac{4.248}{315} \approx 3.8 \Rightarrow t = 3$

+ t = 3 ta có $(2) \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{143}{315}$

+ Các bước tương tự tìm được z = 5 , y = 7 , x = 9

+ Vậy có bộ nghiệm (9 ; 7 ; 5 ; 3 ; 1) .Nghiệm là các hoán vị của bộ nghiệm

<u>4. Các bài tập tương tự:</u>

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

a. 5(x.y + y.z + x.z) = 4xyz

b. 7(x^2y + x + xy^2 + y) = 38xy + 38

c. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}=1$

d. 8(x + y + z + t + k) = xyztk

e. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$

f . $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3$