

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN VECTƠ

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức vectơ

1. Chứng minh đẳng thức vectơ khi đề cho các điểm tùy ý

Khi đề bài yêu cầu chứng minh đẳng thức vectơ mà đề cho các điểm tùy ý, thì HS chỉ cần sử dụng linh hoạt hai quy tắc đó là quy tắc cộng và quy tắc trừ.

Kiến thức chuẩn bị:

* Quy tắc cộng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Với 3 điểm A, B, C tùy ý)

* Quy tắc trừ: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (Với 3 điểm A, B, C tùy ý)

Chú ý:

- Dấu hiệu nhận biết quy tắc cộng: Là dấu “+” và điểm chung thỏa đuôi của vectơ này đầu của vectơ kia.

- Dấu hiệu nhận biết quy tắc trừ: Là dấu “-” và chung gốc.

-Tránh trường hợp nhầm lẫn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$;...

Ví dụ 1: Cho 4 điểm A,B,C,D tùy ý. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}.$$

Lời giải:

Cách 1: Biến đổi sử dụng quy tắc trừ.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \text{ (đpcm).}$$

Cách 2: Chèn điểm theo quy tắc cộng biến đổi VT thành VP.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } VT &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = VP \end{aligned}$$

Có thể chèn điểm theo quy tắc trừ và thực hiện tương tự như trên.

Bài tập tương tự

Bài tập 1: Cho 6 điểm A,B,C,D,E,F tùy ý. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AF}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$

Ví dụ 2: Cho 5 điểm A,B,C,D,E tùy ý. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$$

Hướng dẫn: Sắp xếp về đúng dấu hiệu của quy tắc cộng hoặc quy tắc trừ để áp dụng. Có thể chuyển dấu “-” thành dấu “+” để dễ dàng hơn.

Lời giải:

Cách 1:

$$\begin{aligned} \overline{CD} + \overline{AC} - \overline{EC} &= \overline{AE} - \overline{DB} + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AE} - \overline{DB} + \overline{EC} + \overline{CB} \\ \Leftrightarrow \overline{AD} &= \overline{AE} - \overline{DB} + \overline{EB} \Leftrightarrow \overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AE} + \overline{EB} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{AB} \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} \overline{CD} + \overline{AC} - \overline{EC} &= \overline{AE} - \overline{DB} + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CD} + \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AE} + \overline{BD} + \overline{CB} \\ \Leftrightarrow \overline{CD} + \overline{AE} &= \overline{AE} + \overline{CB} + \overline{BD} \Leftrightarrow \overline{CD} = \overline{CD} \end{aligned}$$

Bài tập 2: Cho 5 điểm A,B,C,D,E tùy ý. Chứng minh rằng

a) $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{ED} + \overline{CD} - \overline{CE} + \overline{CB}$

b) $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC} = \overline{AE} - \overline{DE}$

2. Chứng minh đẳng thức vector khi đề cho giả thiết là hình bình hành

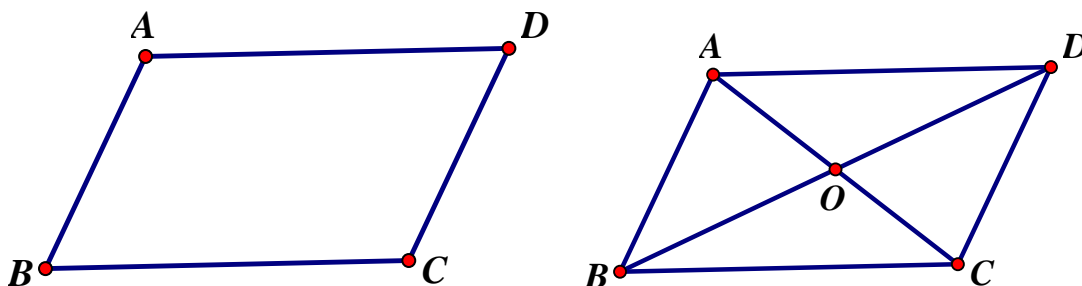
Khi đề bài yêu cầu chứng minh đẳng thức vector mà đề cho giả thiết là hình bình hành thì ngoài việc các em phải vận dụng linh hoạt quy tắc cộng, quy tắc trừ thì các em cần hiểu rõ quy tắc hình bình hành cũng như các tính chất của nó.

Kiến thức chuẩn bị:

* Quy tắc cộng: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (Với 3 điểm A, B, C tùy ý)

* Quy tắc trừ: $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$ (Với 3 điểm A, B, C tùy ý)

* Quy tắc hình bình hành: Cho ABCD là hình bình hành ta có $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$



Cần chú ý thêm: Khi đề cho giả thiết là hình bình hành thì ta sẽ có được những cặp vector bằng nhau và những cặp vector đối nhau. Cặp vector bằng nhau thì ta có thể thay thế trong quá trình biến đổi, cặp vector đối nhau thì tổng của chúng bằng vector - không. Chẳng hạn cho hình bình hành ABCD tâm O ta có:

Các cặp vector bằng nhau: $\overline{AB} = \overline{DC}; \overline{AD} = \overline{BC}; \overline{AO} = \overline{OC}; \dots$

Các cặp vector đối nhau: $\overline{AB} + \overline{CD} = \vec{0}; \overline{AD} + \overline{CB} = \vec{0}; \overline{OB} + \overline{OD} = \vec{0}; \dots$

GV nhấn mạnh để HS hiểu và phân biệt rõ hai khái niệm này (HS trung bình và yếu rất dễ bị nhầm lẫn):

- Hai vector bằng nhau: Là hai vector có cùng hướng và cùng độ dài.

- Hai vector đối nhau: Là hai vector ngược hướng và cùng độ dài.

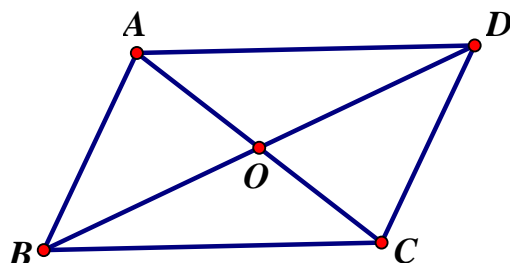
Ví dụ 3: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Chứng minh rằng

a) $\overline{DA} - \overline{DB} + \overline{DC} = \vec{0}$

b) $\overline{CO} - \overline{OB} = \overline{BA}$

Lời giải:

a) Ta có : $\vec{VT} = \vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC}$
 $= (\vec{DA} - \vec{DB}) + \vec{DC}$ (quy tắc trừ)
 $= \vec{BA} + \vec{DC}$ (ABCD là hình bình hành nên $\vec{BA}; \vec{DC}$ là hai vectơ đối)
 $= \vec{0} = VP$ (đpcm).



b) Ta có $\vec{VT} = \vec{CO} - \vec{OB}$
 $= \vec{OA} - \vec{OB}$ (vì $\vec{CO} = \vec{OA}$)
 $= \vec{BA}$ (quy tắc trừ)
 $= VP$ (đpcm).

Bài tập 3: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Chứng minh rằng

- a) $\vec{DA} - \vec{DB} = \vec{OD} - \vec{OC}$
- b) $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DB}$
- c) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$

3. Chứng minh đẳng thức vectơ khi đề cho giả thiết về trung điểm của đoạn thẳng.

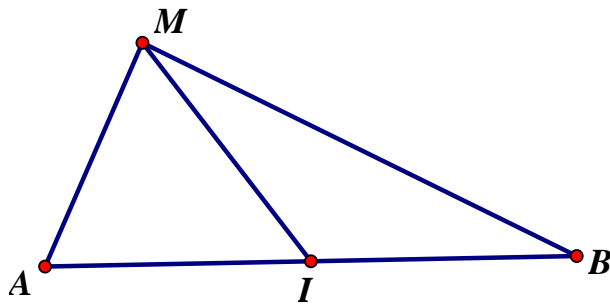
Khi đề bài yêu cầu chứng minh đẳng thức vectơ mà đề cho giả thiết về trung điểm của đoạn thẳng thì ngoài việc các em phải vận dụng linh hoạt quy tắc cộng, quy tắc trừ thì các em cần hiểu rõ hai đẳng thức liên quan đến trung điểm.

Kiến thức chuẩn bị:

- * Quy tắc cộng: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (Với 3 điểm A, B, C tùy ý)
- * Quy tắc trừ: $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ (Với 3 điểm A, B, C tùy ý)
- * Quy tắc trung điểm: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có:

$$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$$

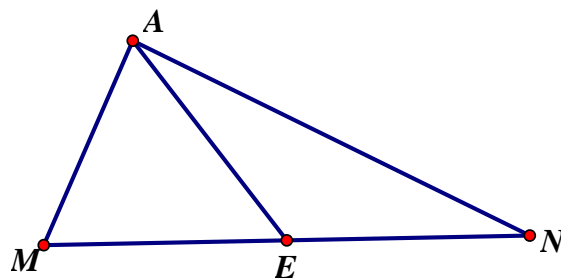
$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI} \text{ (M là điểm tùy ý).}$$



Lưu ý: Các em cần linh hoạt khi đổi tên và vai trò các điểm. Ví dụ: E là trung điểm đoạn thẳng MN ta có:

$$\vec{EM} + \vec{EN} = \vec{0}$$

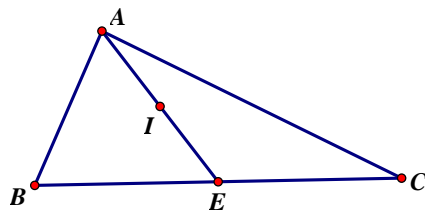
$$\vec{AM} + \vec{AN} = 2\vec{AE} \text{ (A là điểm tùy ý).}$$



Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có E là trung điểm của đoạn thẳng BC và I là trung điểm của đoạn thẳng AE. Chứng minh rằng

a) $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$

b) $2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 4\vec{MI}$ (M tùy ý)



Lời giải:

a) $VT = 2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}$

$$= 2\vec{IA} + 2\vec{IE} \text{ (E là trung điểm của BC)}$$

$$= 2(\vec{IA} + \vec{IE})$$

$$= \vec{0} \text{ (I là trung điểm của AE)}$$

b) $2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 4\vec{MI}$

Cách 1: Chèn điểm, sử dụng kết quả ở câu a)

$$VT = 2(\vec{MI} + \vec{IA}) + (\vec{MI} + \vec{IB}) + (\vec{MI} + \vec{IC}) = 4\vec{MI} + (2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}) = 4\vec{MI} = VP \text{ (đpcm).}$$

Cách 2: Sử dụng trực tiếp công thức trung điểm

$$VT = 2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$$

$$= 2\overline{MA} + 2\overline{ME} \text{ (quy tắc trung điểm; E là trung điểm của BC).}$$

$$= 2(\overline{MA} + \overline{ME}) = 2.2\overline{MI} \text{ (quy tắc trung điểm; I là trung điểm của AE).}$$

$$= 4\overline{MI} = VP \text{ (đpcm).}$$

Bài tập 4: Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD và O là trung điểm của IJ. Chứng minh rằng

a) $\overline{AC} + \overline{BD} = 2\overline{IJ}$

b) $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$

c) $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 4\overline{MO}$ (O tùy ý)

Dạng 2: Tính độ dài vector

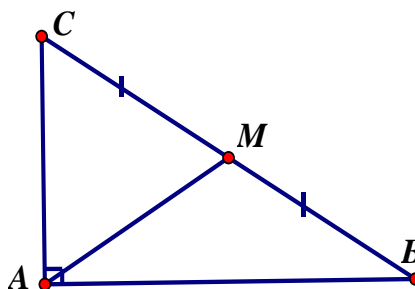
Kiến thức chuẩn bị:

* Độ dài vector là khoảng cách từ điểm đầu đến điểm cuối của vector đó. Kí hiệu độ dài của vector \vec{a} là $|\vec{a}|$.

Chú ý: Độ dài của vector nó là một số thực(không có hướng), không phải là vector.

Bài toán tính độ dài vector đưa về bài toán tính độ dài của đoạn thẳng. Các kiến thức HS thường áp dụng :

* Định lí Pitago: Tam giác ABC vuông tại A ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$



* Tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng $\frac{1}{2}$ cạnh đó là tam giác vuông và ngược lại. Ta có $AM = \frac{1}{2}BC$.

* Ngoài ra còn áp dụng các tính chất của hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông,... HS muốn làm tốt bài toán tính độ dài vector đòi hỏi HS phải thành thạo các quy tắc.

* Quy tắc cộng: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (Với 3 điểm A, B, C tùy ý)

* Quy tắc trừ: $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$ (Với 3 điểm A, B, C tùy ý)

* Quy tắc hình bình hành: Cho ABCD là hình bình hành ta có $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$

* Quy tắc trung điểm: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có:

$$\overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \quad (M \text{ là điểm tùy ý}).$$

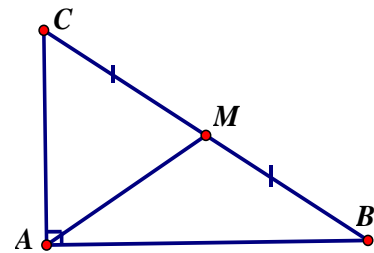
* Quy tắc xác định tổng hai vector bất kỳ (dùng các vector thay thế để đưa về áp dụng một trong các quy tắc nói trên).

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=4a$, $AC=3a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính độ dài các vector sau:

- \overrightarrow{BC}
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Lời giải:

- $|\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = 5a$
- $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 3a$
- $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AB}| = AB = 4a$



$$d) |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{2AM}| = 2 \cdot AM = 2 \cdot \frac{BC}{2} = 5a.$$

Ví dụ 6: Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$. Tính độ dài các vector sau:

- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

Bài tập 5: Cho hình vuông ABCD cạnh a tâm O. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$

Trên đây là hai dạng toán cơ bản trong chương vector. Hy vọng bài viết phần nào bổ ích với các em. Chúc các em có nhiều động lực trong học tập để sớm đạt được ước mơ của mình. Good luck!!