

1. Tìm u_1 ; d ; q ; S_n của cấp số

1.1. **Phương pháp** : Dựa vào các công thức về số hạng tổng quát , tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng hoặc cấp số nhân để suy ra kết quả .

1.1.1. Nếu (u_n) là cấp số cộng thì :

- $u_n = u_1 + (n-1)d$, $\forall n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$
- $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$.

1.1.2. Nếu (u_n) là cấp số nhân thì :

- $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- $$\begin{cases} S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = nu_1 & \text{khi } q = 1 \\ S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{khi } q \neq 1 \end{cases}$$

1.2. Các ví dụ minh họa :

Ví dụ 3. Tìm u_1 , d , u_{15} , S_{20} của các cấp số cộng sau :

a) (u_n) : 2, 5, 8, 11, ... ; b) (u_n) biết $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$.

Ví dụ 4. Tìm u_1 , d của các cấp số cộng biết :

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases}$; d) $\begin{cases} S_{16} = \frac{152\sqrt{2}}{3} \\ S_{21} = 3S_{10} \end{cases}$.

Ví dụ 5.a) Tìm 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng là 25 và tổng các bình phương của chúng là 165 ;

b) Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng là -10 và tổng các bình phương của chúng là 70 .

Ví dụ 6. Tìm u_1 , q , u_{15} , S_{20} của các cấp số nhân sau :

a) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$.

Ví dụ 7. Tìm u_1 , q biết $(u_1 > 0)$ của các cấp số nhân biết :

a) $\begin{cases} u_1 \cdot u_5 = 25 \\ u_2 + u_3 + u_4 = 31 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases}$.

Ví dụ 8.a) Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 14 và tổng các bình phương của chúng là 84 .

b) Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 15 và tổng các bình phương của chúng là 85 .

2. Các bài toán ứng dụng tính chất của cấp số

2.1. **Phương pháp** : Dựa vào các công thức về tính chất các số hạng của cấp số cộng hoặc cấp số nhân :

- Nếu (u_n) là cấp số cộng thì : $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$, $(\forall k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}^*)$

- Nếu (u_n) là cấp số nhân thì : $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$, $(\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*)$.

2.2. **Chú ý :** Ta có thể dễ dàng chứng minh được :

- a, b, c lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.
- a, b, c lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow a \cdot c = b^2$.

2.3. **Các ví dụ minh họa :**

Ví dụ 9. Cho ba số a, b, c lập thành cấp số cộng . Chứng minh các hệ thức sau:

$$\text{a) } a^2 + 2bc = c^2 + 2ab \quad ; \quad \text{b) } a^2 + 8bc = (2b + c)^2 \quad .$$

Ví dụ 10. Cho ba số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Chứng minh rằng ba số $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Ví dụ 11. Cho ba số a, b, c lập thành cấp số nhân .Chứng minh các hệ thức sau:

$$\text{a) } (a^2 + b^2) \cdot (b^2 + c^2) = (ab + bc)^2 \quad ; \quad \text{b) } a^2 + 4c^2 - 4ab + 8bc = (a - 2b - 2c)^2 \quad .$$

Ví dụ 12. Chứng minh rằng nếu 3 số $\frac{2}{y-x}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y-z}$ lập thành một cấp số cộng thì 3 số x, y, z lập thành một cấp số nhân .

Ví dụ 13. Tìm các số dương a và b sao cho $2a+1, 2a-b, 2b+1$ lập thành một cấp số cộng và $(b+3)^2, ab+4, (a-1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

3. Tính tổng hữu hạn

3.1. **Phương pháp:** Để tính một tổng có hữu hạn phần tử ta có thể làm như sau:

- Xét xem các số hạng của nó có lập thành một cấp số cộng hoặc cấp số nhân hay không , nếu chưa hãy biến đổi các số hạng hoặc tách thành các tổng khác nhau mà các số hạng của chúng tạo thành cấp số .
- Dựa vào công thức số hạng tổng quát của cấp số để tìm xem các tổng cần tính có bao nhiêu số hạng .
- Tính các tổng trên dựa vào các công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số , rồi suy ra kết quả .

3.2. **Chú ý :**

- (u_n) lập thành cấp số cộng thì :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} .$$

- (u_n) lập thành cấp số nhân thì :

$$\left[\begin{array}{ll} S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = nu_1 & \text{khi } q = 1 \\ S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{khi } q \neq 1 \end{array} \right. .$$

3.3. **Các ví dụ minh họa :**

Ví dụ 14. Tính các tổng sau :

- a) $A = 15 + 20 + 25 + \dots + 7515$;
- b) $B = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Ví dụ 15. Tính các tổng sau :

- a) $A = -27 + 81 - 243 + \dots + 531441$;
- b) $B = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{(n \text{ số } 9)}$.

Ví dụ 16. Tính các tổng sau :

a) $A = 1 + 2.2 + 3.2^2 + \dots + 100.2^{99}$;

b) $B = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3^2 + \frac{1}{3^2}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng, khi đó cho biết số hạng đầu và công sai của nó:

a) $u_n = 5n - 3$; b) $u_n = \frac{2n+1}{3}$; c) $u_n = n^3$;

d) $u_n = 4^n + 1$; e) $u_n = \frac{4-3n}{5}$; f) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$.

Bài 2. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_2 + u_5 = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$; c) $\begin{cases} u_2 + u_4 = 5 \\ u_1^2 + u_5^2 = 25 \end{cases}$

Bài 3. a) Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng.

b) Giữa các số 4 và 67 hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng.

Bài 4. a) Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng là 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

b) Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 1176 .

Bài 5. a) Số đo các góc của một đa giác lồi có 9 cạnh lập thành một cấp số cộng có công sai $d = 3^\circ$. Tìm số đo của các góc đó.

b) Số đo các góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số cộng và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất. Tìm số đo các góc đó.

Bài 6. Chứng minh rằng nếu 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng thì :

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - 6(a-b)^2 = (a+b+c)^2 .$$

Bài 7. Chứng minh rằng nếu 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng thì các số x, y, z cũng lập thành một cấp số cộng, biết :

a) $x = b^2 + bc + c^2$; $y = c^2 + ca + a^2$; $z = a^2 + ab + b^2$.

b) $x = a^2 - bc$; $y = b^2 - ca$; $z = c^2 - ab$.

Bài 8. Tìm x để 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng, với:

a) $a = 10 - 3x$; $b = 2x^2 + 3$; $c = 7 - 4x$.

b) $a = x + 1$; $b = 3x - 2$; $c = x^2 - 1$.

Bài 9. Tìm các nghiệm số của phương trình: $4x^3 - 6\sqrt{6}x^2 + 14x - \sqrt{6} = 0$, biết rằng các nghiệm số phân biệt và tạo thành một cấp số cộng.

Bài 10. Tìm các giá trị của m để phương trình : $x^4 - 2(m+2)x^2 + 2m+3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng .

Bài 11. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = a, (a \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = 3 - 2u_n, (n \geq 1) \end{cases}$.

Tìm các giá trị của a để dãy số (u_n) là cấp số cộng .

Bài 12. Cho cấp số cộng (u_n)

a) Chứng minh : $u_k = \frac{u_{k-m} + u_{k+m}}{2}, (\forall m, k \in \mathbb{N}^*, m < k)$.

b) Tính tổng $2k-1$ số hạng đầu tiên của (u_n) , biết $u_{k-m} + u_{k+m} = a$.

Bài 13. Cho dãy số (u_n) , biết tổng n số hạng đầu tiên : $S_n = \frac{n(1-2n)}{2}$

a) Hãy xác định số hạng tổng quát của (u_n) .

b) Chứng minh (u_n) là một cấp số cộng, tìm công sai của nó.

Bài 14. Cho cấp số cộng (u_n) . Chứng minh :

a) $\frac{1}{u_1 \cdot u_2} + \frac{1}{u_2 \cdot u_3} + \dots + \frac{1}{u_{n-1} \cdot u_n} = \frac{n-1}{u_n \cdot u_1}$.

b) $\frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_1}}$, ($u_n > 0$)

Bài 15. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2, (\forall n \geq 1) \end{cases}$

Xét dãy số (v_n) biết : $v_n = u_{n+1} - u_n$, ($\forall n \geq 1$)

a) Chứng minh dãy số (v_n) là cấp số cộng, tìm số hạng đầu và công sai của nó.

b) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Bài 16. Trong các dãy số sau đây dãy nào là cấp số nhân, nếu phải hãy tìm công bội của nó.

a) $u_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$; b) $u_n = n + 3$;

c) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}u_n \end{cases}$.

Bài 17. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1^2 + u_3^2 = 50 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12}, (q > 0) \end{cases}$;

c) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$; d) $\begin{cases} u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 14 \end{cases}$.

Bài 18.a) Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

b) Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

Bài 19. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Bài 20.a) Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

b) Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Bài 21. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

Bài 22. Số số hạng của một cấp số nhân là một số chẵn. Tổng tất cả các số hạng của nó lớn gấp 3 lần tổng các số hạng có chỉ số lẻ. Xác định công bội của cấp số nhân đó.

Bài 23. Bốn số a, b, c, d lập thành cấp số nhân. Chứng minh :

a) $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$;

b) $(ab+bc+cd)^2 = (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$.

Bài 24. Chứng minh :

a) Nếu a, b, c lập thành một cấp số nhân thì ab, b^2, cb cũng lập thành một cấp số nhân.

b) Nếu bốn số dương a, b, c, d lập thành cấp số nhân thì ba số : $\sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{cd}$ cũng lập thành cấp số nhân.

Bài 25. Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\frac{148}{9}$, đồng thời, theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Bài 26. Cho dãy số (u_n) , biết tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = \frac{5^n - 3}{5^{n-1}}$

a) Hãy xác định số hạng tổng quát của (u_n) .

b) Chứng minh (u_n) là một cấp số nhân, tìm công bội của nó.

Bài 27. Cho cấp số nhân (u_n) có $q \neq 0$, $u_1 \neq 0$

a) Chứng minh: $|u_k| = \sqrt{u_{k-m} \cdot u_{k+m}}$, $(\forall m, k \in \mathbb{N}^*, m < k)$.

b) Chứng minh: $u_k = u_m \cdot q^{k-m}$.

b) Tính tổng k số hạng đầu tiên của (u_n) , biết $u_{k-m} \cdot u_{k+m} = a$, $q > 0$.

Bài 28. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}, (\forall n \geq 2) \end{cases}$

Xét dãy số (v_n) biết: $v_n = u_{n+1} - u_n$, $(\forall n \geq 1)$

a) Chứng minh dãy số (v_n) là cấp số nhân.

b) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Bài 29. Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Bài 30. Tìm 4 số trong đó ba số đầu là ba số hạng kế tiếp của một cấp số nhân, còn ba số sau là ba số hạng kế tiếp của một cấp số cộng; tổng hai số đầu và cuối bằng 32, tổng hai số giữa bằng 24.

Bài 31. Tìm các số x, y sao cho $x+3y, 5x-2y, x+3y$ lập thành một cấp số cộng và $(x-1)^2, xy-3, (y+2)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Bài 32. Chứng minh các dãy (u_n) sau vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân

a) (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4}{4}, (\forall n \geq 1) \end{cases}$; b) (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}, (\forall n \geq 1) \end{cases}$.

Bài 33. Tính các tổng sau:

a) $A = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{777\dots7}_{(n \text{ số } 7)}$;

b) $B = 15 + 155 + 1555 + \dots + \underbrace{1555\dots5}_{(n \text{ số } 5)}$;

c) $C = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \dots + \left(x^{2010} + \frac{1}{x^{2010}}\right)^2$, $(x \neq 0)$;

d) $D = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \dots + 2010.3^{2009}$;

e) $E = 1 + 4.3 + 7.3^2 + \dots + (3n-2).3^n$;

f) $F = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$.

g) $G = (2n)^2 - (2n-1)^2 + (2n-2)^2 - (2n-3)^2 + \dots + 2^2 - 1$.