NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Khi giải một bài toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình học sinh thường mắc không ít các sai lầm. Thường là sai lầm do thực hiện các phép biến đổi qua cách hiểu sai các công thức hay các khái niệm, hoặc không xét hết các trường hợp xảy ra...Qua thực tế giảng dạy nhiều năm tôi nhận thấy rõ những điểm yếu này. Vì vậy, Tôi trình bày một số sai lầm học sinh gặp phải và cách sửa sai để học sinh rút kinh nghiệm, tuy nhiên vì thời gian có hạn nên tôi chỉ xin nêu một số sai lầm cơ bản thường gặp nhất.

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

DẠNG I: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow f(x)=0?$

Bài tập: Giải phương trình: $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=0$

Sai lầm thường gặp $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Nguyên nhân sai lầm là x=1 không phải là nghiệm.

Lời giải đúng

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x^2-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Đây là một dạng cơ bản mà học sinh thường mắc sai lầm, đặc biệt là các bài toán tham số.

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Bài tập: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ cắt đường thẳng d:y= mx+1 tại hai điểm phân biệt.

Rất nhiều học sinh khi giải bài này thường trình bày như sau: Phương trình hoành độ giao điểm cua đường cong và đường thẳng là:

$$\frac{x-1}{x+1} = mx+1 \Leftrightarrow x-1 = (mx+1)(x+1) \Leftrightarrow mx^2 + mx + 2 = 0$$

Đường cong cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Đó là một sai lầm cơ bản.

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Lời giải đúng:

$$\frac{x-1}{x+1}=mx+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=(mx+1)(x+1) \\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+mx+2=0(*) \\ x\neq -1 \end{cases}$$

Đường cong cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt. Đến đây thì lời giải tương đối dễ dàng.

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

DẠNG II: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)h(x)=g(x)h(x)?$

Bài tập: Giải phương trình: $(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{x-1}+3x-10)=x-2$

Để giải phương trình này không khó, chúng ta có thể dễ dàng giải bằng phương pháp nhân lượng liên hợp. Tuy nhiên đa số học sinh thường phạm phải sai lầm sau:

$$(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{x-1}+3x-10)=x-2\Leftrightarrow(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+3x-10)=(x-2)(\sqrt{x-1}-1)$$

$$\Leftrightarrow(x-2)(\sqrt{x-1}+3x-10)=(x-2)(\sqrt{x-1}-1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \sqrt{x-1}+3x-10-\sqrt{x-1}-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=3\end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy x=2 không phải là nghiệm cua phương trình.

Vậy sai lầm ở đâu?

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Rõ ràng khi nhân hai vế của phương trình cho $\sqrt{x-1}-1$

chúng ta đã không xét trường hợp . $\sqrt{x-1}-1=0$

Sửa lại đúng:

Xét x= 2 không là nghiệm của phương trình nên

Xét $x \neq 2$ khi đó

$$(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{x-1}+3x-10)=x-2 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+3x-10)=(x-2)(\sqrt{x-1}-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(\sqrt{x-1}+3x-10)=(x-2)(\sqrt{x-1}-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \sqrt{x-1}+3x-10-\sqrt{x-1}-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=3$$

Vậy phương trình có nghiệm x=3

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

DẠNG IV. $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)}$

Bài tập: Giải phương trình $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$

Sai lầm thường gặp

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=1\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2})^3=1\Leftrightarrow 3x-2+3\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1})=1(1)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}=1-x\ (2)\Leftrightarrow(2x-1)(x-1)=(x-1)^3\Leftrightarrow(x-1)[(x-1)^2+2x-1]=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(1-x)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=1$$

Nguyên nhân sai lầm: Phép thế $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$

ở (1) sang (2) là phép biến đổi hệ quả chứ không phải là phép biến đôi tương đương.

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Lời giải đúng:

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=1 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2})^3=1 \Leftrightarrow 3x-2+3\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1})=1(1)$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}=1-x(2) \Leftrightarrow (2x-1)(x-1)=(x-1)^3 \Leftrightarrow (x-1)[(x-1)^2+2x-1]=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

Thay x=1; x=0 vào thử ta thấy phương trình có nghiệm x= 1

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

DẠNG V. $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}\sqrt{B}\,?; \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\,?$

Bài tập: Giải các phương trình: $\sqrt{(x+1)(x^2-x-2)} = x+1$

Sai lầm thường gặp

$$\sqrt{(x+1)(x^2-x-2)} = x+1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+1)(x-2)} = x+1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2(x-2)} = x+1$$

$$\Leftrightarrow |x+1|\sqrt{x-2} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x \geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{x-2}=1 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Cách giải trên đã làm mất nghiệm x=-1

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Sửa lại đúng:

$$\sqrt{(x+1)(x^2-x-2)}=x+1\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)(x+1)(x-2)}=x+1\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2(x-2)}=x+1$$

$$\Leftrightarrow|x+1|\sqrt{x-2}=x+1\Leftrightarrow x+1=0\vee\begin{cases}\sqrt{x-2}=1\\ x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x=3\vee x=-1$$

DẠNG 6: BẤT PHƯƠNG TRÌNH

$$\sqrt{f(x)}g(x)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\end{cases}?;\sqrt{f(x)}g(x)\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)\le 0\end{cases}?$$

Đây là một dạng toán rất phổ biến trong các đề thi đại học

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Bài tập: Giải bất phương trình $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0$

Sai lầm thường gặp $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x\ge 0 \\ 2x^2-3x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\le -1/2 \vee x\ge 3$

Rõ ràng cách giải trên làm mất nghiệm x = 2

Lời giải đúng

$$(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x-2=0 \\ \begin{cases} 2x^2-3x-2\ge 0 \\ x^2-3x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2-3x-2>0 \\ x^2-3x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\le -1/2 \vee x\ge 3 \vee x=2$$

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Chú ý: $\sqrt{f(x)}g(x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{f(x)}g(x)=0\\ \sqrt{f(x)}g(x)>0\end{array}\right. \Leftrightarrow f(x)=0 \vee \left\{\begin{array}{l}g(x)=0\\ f(x)\ge 0\end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l}f(x)>0\\ g(x)>0\end{array}\right.$

CÁC SAI LẦM KHI DÙNG HÀM ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH

SAI LẦM 1: Học sinh thường dùng hàm mà không chú ý đến hàm đó có liên tục trên tập xét hay không.

Bài tập: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y}\ (1) \\ 2y=x^3+1 \end{cases}$$

(Khối A 2003).

Giải.

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Sai lầm: Xét hàm số $f(t)=t-\frac{1}{t}\Rightarrow f'(t)=1+\frac{1}{t^2}>0,\ \forall t\in R$

nên hệ phương trình

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\2y=x^3+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x^3-2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\vee x=y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Đây là một sai lầm thường mắc phải của các em học sinh khi sử dụng phương pháp này, bởi vì hàm số f(t) gián đoạn tại t = 0.

Sửa lại đúng: Với đk $x.y\neq 0$ ta có

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(1+\frac{1}{xy})=0\\2y=x^3+1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x=y\\x^3-2x+1=0\end{cases}(2)\right.\left.\begin{cases}(1+\frac{1}{xy})=0\\2y=x^3+1\end{cases}(3)\right.$$

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Giải (2) $(x;y)=\{(1;1);(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2})\}$

Giải (3), $\begin{cases} y=\dfrac{-1}{x} \\ x^4+x+2=0 \end{cases}$ Xét hàm số $f(x)=x^4+x+2; x\neq 0$

$\min f(x)>0 \forall x\neq 0$ nên hệ phương trình (3) vô nghiệm.

Nhận xét: *Voi* $f'(x)\geq 0, \forall x\in D_f$ và y = f(x) liên tục trên D_f thì

$$\begin{cases} f(x)=f(y) \\ F(x;y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ F(x;y)=0 \end{cases}$$

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

SAI LẦM 2: Sai lầm do lỗi trình bày

Bài tập: Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+7}=9$

Khi giải bài này học sinh thường trình bày như sau:

Điều kiện: $x \geq -1$ $Xet\ \text{hs}\ f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+7}$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3}}+\frac{3}{2\sqrt{3x+7}}>0\forall x\geq -1$$

suy ra hàm số đồng biến $\forall x \geq -1$

Mà x=3 là nghiệm của phương trình nên phương trình có nghiệm duy nhất.

Sai lầm ở đây là f'(x)>0 khi x>-1 còn x=-1 đạo hàm không xác định

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Sửa lại đúng: Đặt $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+7}$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3}}+\frac{3}{2\sqrt{3x+7}}>0\forall x>-1$$

mà hàm số liên tục $\forall x\geq -1$ nên hàm số đồng biến $\forall x\geq -1$

Mà x=3 là nghiệm của phương trình nên phương trình có nghiệm duy nhất.

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

SAI LẦM 3: Sai lầm do lỗi chọn khoảng xét của hàm, đây là một sai lầm điển hình khi giải phương trình, hệ phương trình bằng phương pháp hàm

Bài tập: Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x+y>0$

$$\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1(1) \\ \sqrt{x+y}=x^2-y(2) \end{cases}$$

Cách 1:

Từ (2) viết lại : $\sqrt{x+y}+x+y=x^2+x \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+y}\right)^2+\sqrt{x+y}=x^2+x$

Ta xét hàm số $f(t)=t^2+t\left(t\geq 0\right)\Rightarrow f'\left(t\right)=2t+1>0\forall t\geq 0$

Chứng tỏ f(t) là một hàm số đồng biến khi t không âm , cho nên ta có :

$$\sqrt{x+y}=x\Leftrightarrow y=x^2-x(*)$$

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Thay vào (1) :

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{2xy}{x^2}=1\Leftrightarrow x^2+\left(x^2-x\right)^2+\frac{2x\left(x^2-x\right)}{x^2}=1\Leftrightarrow x^2-1+x^2\left(x-1\right)^2+2\left(x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x+1+x^2\left(x-1\right)+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x^3-x^2+x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\\left(x+1\right)\left(x^2-2x+3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.\left(**\right)$$

Thay vào (*) :

$$\Leftrightarrow y=x^2-x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;y=2\\x=1;y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(x;y\right)=\left(1;2\right),\left(1;0\right)$$

Chú ý : Các em có nhận xét gì không khi tôi giải như trên .

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

Bây giờ tôi nêu thêm cách hai nữa để các em kiểm nghiệm nhé

Cách 2. Đặt:

$$x+y=u;xy=v\Rightarrow (1)\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1\Leftrightarrow (x+y)^2-2xy+\frac{2xy}{x+y}=1$$

Khi đó phương trinh

$$\Leftrightarrow u^2-2v+\frac{2v}{u}=1\Leftrightarrow u^3-u-2uv+2v=0\Leftrightarrow u(u^2-1)-2v(u-1)=0\Leftrightarrow (u-1)\left[u(u+1)-2v\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ u^2+u-2v=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1 \\ (x+y)^2+(x+y)-2xy=0 \end{array}\right.$$

* Nếu x+y=1 thay vào (2) ta được :

$$1=x^2-(1-x)\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\leftrightarrow y=0 \\ x=-2\rightarrow y=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x;y)=(1;0),(-2;3)$$

NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI PT, BPT, HỆ PT

* Với $(x+y)^2+(x+y)-2xy=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+x+y=0$

vô nghiệm vì $(x^2+y^2>0; x+y>0)$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;0),(-2;3)$