PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

I.Tóm tắt lý thuyết:

- Trong không gian với hệ tọa độ Oxy cho :
  - $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow M(x;y)$
  - $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u}(x;y)$
- **Với** $\vec{a} = (a_1;a_2);\vec{b} = (b_1;b_2)$
  - $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$
  - $\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1;a_2+b_2)\,;\, k\vec{a} = (ka_1;ka_2)$ với $k \in R$
  - $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$
  - $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$
  - $\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
  - $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ $\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$
  - $Cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$
- **Với** $A = (x_A;y_A);B = (x_B;y_B)$
  - $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;y_B - y_A)$
  - $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
  - Tọa độ trung điểm M của AB: $M(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2})$
- **Phương trình tổng quát của đường thẳng** đi qua điểm $Mx_0;y_0)$ và có vtpt $\vec{n}$ = (A; B).là: $A(x – x_0) + B(y – y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$
- **Phương trình đường tròn (C)** tâm I (a,b), bán kính R là :
  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ hoặc $x^2 + y^2 – 2ax - 2by + c = 0$

Phương pháp thực hiện:

Bước 1: Chọn hệ trục Oxy thích hợp

Ta có Ox, Oy vuông góc với nhau. Do đó trong mô hình chứa các cạnh vuông góc thì ta ưu tiên các cạnh đó lần lượt nằm trên các trục tọa độ.

Bước 2: Chuyển các giả thiết, kết luận từ ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ tọa độ

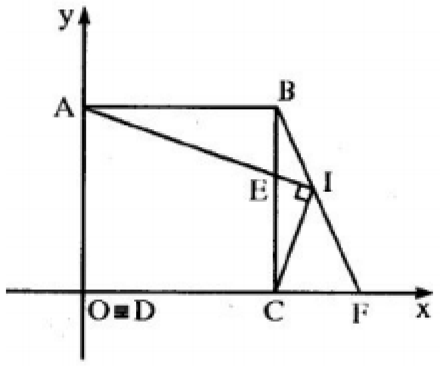
Bước 3: Giải bài toán bằng phương pháp tọa độ

Bước 4: Chuyển kết quả từ ngôn ngữ tọa độ sang ngôn ngữ hình học.

II. MỘt SỐ BÀI TOÁN

Bài 1. Cho hình vuông ABCD. E, F là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, AE cắt BF tại I. Chứng minh : góc AIC bằng 90^0.

Bài giải:



Giả sử cạnh hình vuông có độ dài bằng 1. Gắn hệ trục (Oxy) sao cho D(0;0), C(1;0), A(0;1). Ta có:

$E\left(1;\frac{2}{3}\right),F\left(\frac{3}{2};0\right),B(1;1)$

Phương trình đường thẳng $AE: x+3y-3=0, BF: 2x+y-3=0$

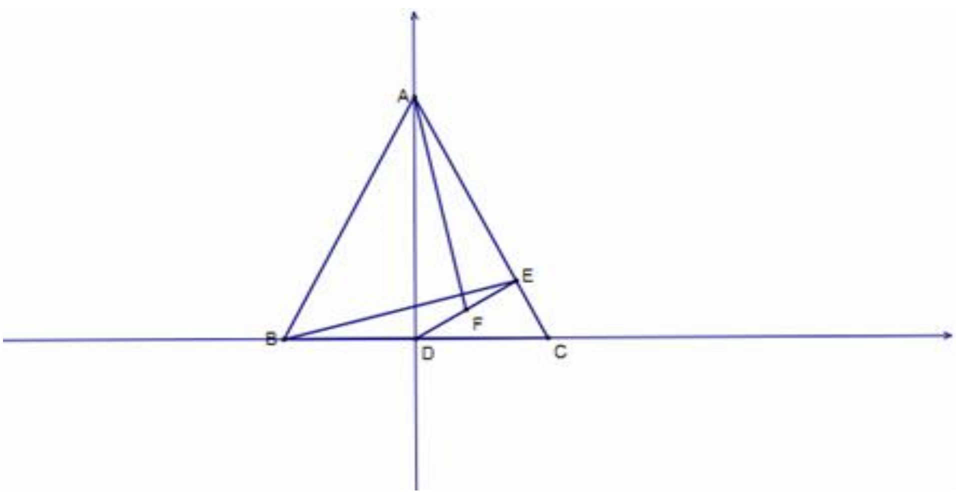
Tọa độ I là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+3y=3\\2x+y=3\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{6}{5};\frac{3}{5}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AI}=\left(\frac{6}{5};-\frac{2}{5}\right),\overrightarrow{CI}=\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$

Khi đó: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CI}=0\Rightarrow\overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{CI}$.

Vậy: Góc AIC bằng 90^0.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm BC, E là hình chiếu của D trên CA và F là trung điểm DE. Chứng minh rằng AF$\perp$BE.

Bài giải:



Chọn hệ trục Oxy sao cho:

$D(0;0),\ B(-1;0),\ C(1;0),\ A(0;a)$

Phương trình đường thẳng AC: $x+\dfrac{y}{a}=1 \Leftrightarrow ax+y-a=0$

Phương trình DE: $x-ay=0$. Tọa độ E là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} ax+y=a \\ x-ay=0 \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{a^2}{1+a^2};\frac{a}{1+a^2}\right) \Rightarrow F\left(\frac{a^2}{2(1+a^2)};\frac{a}{2(1+a^2)}\right)$$

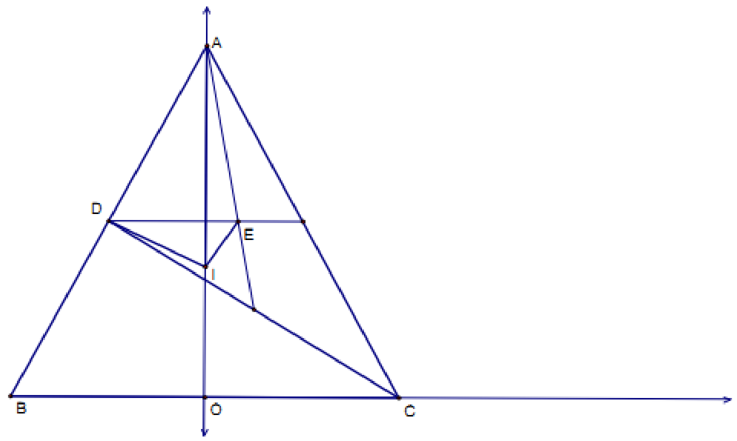
Ta có:

$$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{2a^2+1}{1+a^2};\frac{a}{1+a^2}\right),\overrightarrow{AF}=\left(\frac{a^2}{2(1+a^2)};\frac{-2a^3-a}{2(1+a^2)}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AF}=0 \text{ (đpcm)}$$

Bài 3.

Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC. D là trung điểm AB và E là trọng tâm tam giác ACD. Chứng minh : $IE \perp CD$.

<u>Bài giải:</u>



Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục Oxy:

$$O(0;0),A(0;a),B(-c;0),C(c;0),D\left(-\frac{c}{2};\frac{a}{2}\right),E\left(\frac{c}{6};\frac{a}{2}\right)$$

Ta có: $$\begin{cases} \overrightarrow{DI} \perp \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{c}{2};y-\frac{a}{2}\right).(c;a)=0 \\ (x;y).(2c;0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{a^2-c^2}{2a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I\left(0;\frac{a^2-c^2}{2a}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{DC}=\left(\frac{c}{6};\frac{c^2}{2a}\right)\left(\frac{3c}{2};-\frac{a}{2}\right)=0$$

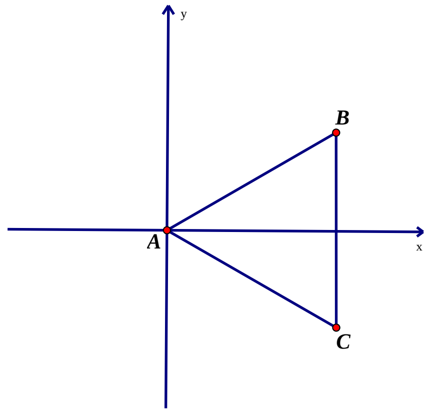
Vậy: $IE \perp CD$

<u>Bài 4</u> : Điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Chứng minh giá trị của $MA^4 + MB^4 + MC^4$ không phụ thuộc vào vị trí của M.

<u>Giải</u>

Gọi I,R là tâm và bán kính của đường tròn (c) ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Dựng hệ trục như hình vẽ, ta có $A(0,0);B(\frac{3R}{2},\frac{R\sqrt{3}}{2});C(\frac{3R}{2},\frac{-R\sqrt{3}}{2});I(R,0)$



$M(x,y)\in(C)\Rightarrow MI=R$

$\Rightarrow MI^2=R^2\Rightarrow x^2+y^2=2Rx$

Ta có:

$$MA^4+MB^4+MC^4=\left(x^2+y^2\right)^2+[(x-\frac{3R}{2})^2+(y-\frac{R\sqrt{3}}{2})^2]^2+[(x-\frac{3R}{2})^2+(y+\frac{R\sqrt{3}}{2})^2]^2$$

$$=\left(2Rx\right)^2+(3R^2-Rx-R\sqrt{3}y)^2+(3R^2-Rx+R\sqrt{3}y)^2$$

$$=6R^2x^2+6R^2y^2+18R^4-12R^3x$$

$$=6R^2(x^2+y^2)+18R^4-12R^3x$$

$$=12R^3x+18R^4-12R^3x=18R^4$$

Vậy giá trị $MA^4+MB^4+MC^4$ không phụ thuộc vào vị trí M

__Bài 5__: Cho tam giác ABC cân tại A. D là trung điểm cạnh AB, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, E là trọng tâm của tam giác ACD. Chứng minh IE vuông góc CD.

Giải: Chọn hệ trục như hình vẽ (O là trung điểm của BC)

Khi đó : O(0,0); A(0,a); B(-c,0); C(c,0); D(-c/2, a/2); E(c/6,a/2),(a,c>0)

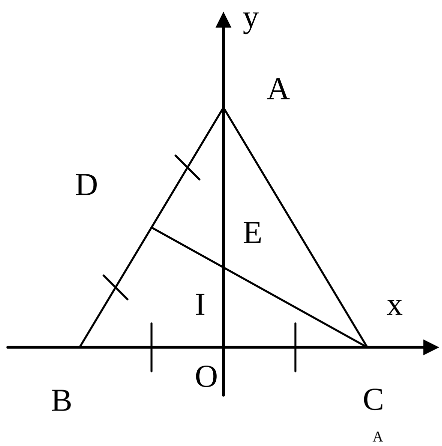
Gọi I(x, y)

Giả thiết suy ra

$$\begin{cases}\overrightarrow{DI}\perp\overrightarrow{BA}\\ \overrightarrow{OI}\perp\overrightarrow{BC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+\frac{c}{2},y-\frac{a}{2}).(c,a)=0\\ (x,y).(2c,o)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\frac{a^2-c^2}{2a}\end{cases}$$

V ậy $I(0,\frac{a^2-c^2}{2a})$



$$\Rightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{DC} = (\frac{c}{6}, \frac{c^2}{2a})(\frac{3c}{2}, -\frac{a}{2}) = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow IE \perp DC (dpcm)$$

<u>Kết luận:</u>

Muốn giải một bài toán bằng phương pháp tọa độ ta cần phải chọn một hệ trục tọa độ sao cho hình vẽ của chúng ta được quan sát tốt nhất trên hệ trục đó và việc tính toán cũng đơn giản nhất. Để chọn được một hệ trục tọa độ tốt, chúng ta cần phải căn cứ vào các yếu tố cố định bài toán đã cho, chú ý đến tính đối xứng của hình.

Khi đã chọn được một hệ trục toạ độ tốt rồi, cần kết hợp phương pháp tính và kỹ năng tính tốt thì việc giải bài toán hình học bằng phương pháp toạ độ mới trở nên đẹp đẽ, ngắn gọn.

Qua các bài toán ở trên, hi vọng giúp các em làm quen dần với việc giải bài toán hình học phẳng bằng phương pháp toạ độ- một phương pháp đưa việc giải bài toán trở nên nhẹ nhàng, không quá phức tạp như cách giải bằng phương pháp dùng hình học thuần túy.

GV: Nguyễn Thị Soạn