CHUYÊN ĐỀ: TÍCH PHÂN HÀM PHÂN NHÁNH

I. CÁC VÍ DỤ

1 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2-x\ khi\ x>1\\ x^2\quad khi\ x\le 1\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=\frac{5}{6}$. **B.** $I=\frac{1}{3}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f\left(x\right)dx+\int_1^2 f\left(x\right)dx$.

Khi đó $I=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\left(2-x\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2=\frac{1}{3}+\left(4-\frac{4}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$.

2 **(ĐỀ CHÍNH THỨC BGD 2021-MĐ 103)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+3\quad khi\ x\ge 1\\ 3x^2+2\ khi\ \ x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(0\right)=2$. Giá trị của $F\left(-1\right)+2F\left(2\right)$ bằng

A. 23. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 21.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F\left(x\right)=\begin{cases}x^2+3x+C_1\ \text{khi}\ x\ge 1\\ x^3+2x+C_2\ \text{khi}\ x<1\end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}F\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+3x+C_1\right)=C_1+4$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}F\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+2x+C_2\right)=C_2+3$.

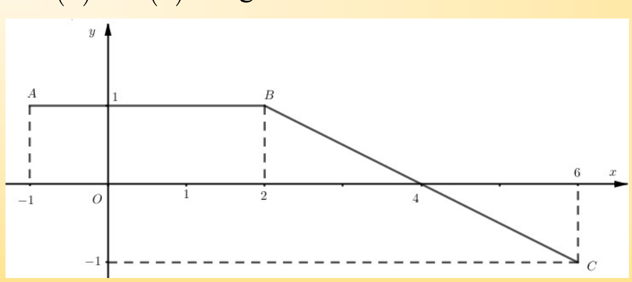
$F\left(x\right)$ liên tục tại $x=1\Leftrightarrow C_1+4=C_2+3$ (1)

$F\left(0\right)=2\Rightarrow C_2=2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}C_1=1\\ C_2=2\end{cases}\Rightarrow F\left(x\right)=\begin{cases}x^2+3x+1\ \text{khi}\ x\ge 1\\ x^3+2x+2\ \text{khi}\ x<1\end{cases}$.

$F\left(-1\right)+2F\left(2\right)=\left(-1\right)^3+2\left(-1\right)+2+2\left(2^2+3.2+1\right)=21$.

3 **(ĐỀ BGD LẦN 2 2020-2021 MÃ ĐỀ 101)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-1;6\right]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F\left(-1\right)=-1$. Giá trị của $F\left(4\right)+F\left(6\right)$ bằng



A. 10. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số ta xác định được $f(x)=\begin{cases}1 & \text{khi } -1\le x<2\\ -\dfrac{1}{2}x+2 & \text{khi } 2\le x\le 6\end{cases}$.

Do F là nguyên hàm của f nên $F(x)=\begin{cases}x+C_1 & \text{khi } -1\le x<2\\ -\dfrac{1}{4}x^2+2x+C_2 & \text{khi } 2\le x\le 6\end{cases}$.

Ta có $F(-1)=-1\Leftrightarrow -1+C_1=-1\Leftrightarrow C_1=0$.

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$ $\Rightarrow F(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$

$\Rightarrow F(x)$ liên tục tại $x=2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}F(x)\Leftrightarrow 2+C_1=3+C_2\Leftrightarrow C_2=-1$.

Suy ra $F(x)=\begin{cases}x & \text{khi } -1\le x<2\\ -\dfrac{1}{4}x^2+2x-1 & \text{khi } 2\le x\le 6\end{cases}$.

Vậy $F(4)+F(6)=5$.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x^2 & khi\ 0\le x\le 1\\ 2-x & khi\ 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1} & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 2x-1 & \text{khi } 1\le x\le 3\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $6+\ln 4$. **B.** $4+\ln 4$. **C.** $6+\ln 2$. **D.** $2+2\ln 2$.

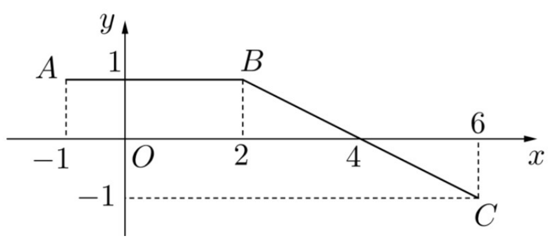
Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+2 & khi\ x\ge 1\\ 3x^2+1 & khi\ x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 18. **B.** 20. **C.** 9. **D.** 24.

Câu 4. Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x)=|x-1|$. Biết rằng $f(0)=3$. Tính $f(2)+f(4)$?

A. 10. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 11.

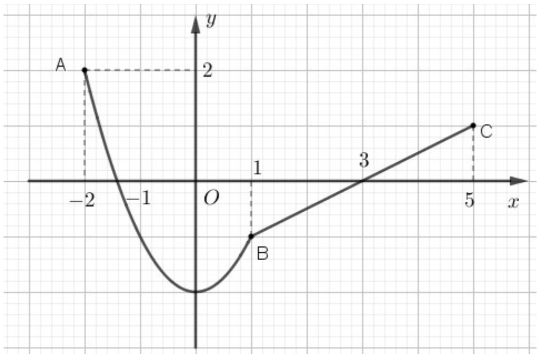
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC như hình bên dưới



Biết F là nguyên hàm của f thoả mãn $F(-1)=-2$. Giá trị của $F(4)+F(6)$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trrên đoạn $[-2;5]$ và có đồ thị như hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-2)=2$. Giá trị của $F(3)+F(5)$ bằng



A. 3. **B.** -3. **C.** 2. **D.** -2.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & khi\ 0 \le x \le 1 \\ 2-x & khi\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\mathrm{d}x = \frac{5}{6}$.

Câu 2. (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 2x-1 & \text{khi } 1 \le x \le 3 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $6+\ln 4$. **B.** $4+\ln 4$. **C.** $6+\ln 2$. **D.** $2+2\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x + \int_1^3 (2x-1)\mathrm{d}x$

$= 2\ln|x+1|\Big|_0^1 + \left(x^2-x\right)\Big|_1^3 = \ln 4 + 6$.

Câu 3. (ĐỀ CHÍNH THỨC BGD 2021-MĐ 104) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & khi\ x \ge 1 \\ 3x^2+1 & khi\ x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 18. **B.** 20. **C.** 9. **D.** 24.

Lời giải

Chọn A

- F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $F(x) = \begin{cases} x^2+2x+C_1 & khi\ x \ge 1 \\ x^3+x+C_2 & khi\ x < 1 \end{cases}$.
- Ta có: $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$. (1)
- Do F liên tục tại $x = 1$ nên $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = F(1)$

$\Leftrightarrow C_1 + 3 = C_2 + 2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} C_1 + 3 = 4 \Leftrightarrow C_1 = 1$.

- Do đó $F(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & khi\ x\ge 1 \\ x^3+x+2 & khi\ x<1 \end{cases}$.
- Suy ra $F(-1)+2F(2)=18$.

Câu 4. (THPT NGỌC TẢO HN-2018) Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x)=|x-1|$. Biết rằng $f(0)=3$. Tính $f(2)+f(4)$?

A. 10. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=\begin{cases} x-1 & \text{khi} & x\ge 1 \\ -(x-1) & \text{khi} & x<1 \end{cases}$.

Khi $x\ge 1$ thì $f(x)=\int(x-1)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}-x+C_1$.

Khi $x<1$ thì $f(x)=-\int(x-1)\mathrm{d}x=-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)+C_2$.

Theo đề bài ta có $f(0)=3$ nên $C_2=3\Rightarrow f(x)=-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)+3$ khi $x<1$.

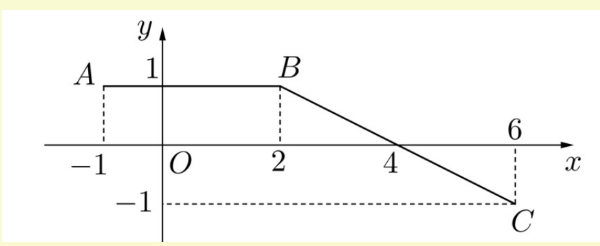
Mặt khác do hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ nên $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-}\left[-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)+3\right]=\lim\limits_{x\to1^+}\left[\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)+C_1\right]\Leftrightarrow -\left(\dfrac{1}{2}-1\right)+3=\dfrac{1}{2}-1+C_1$

$\Leftrightarrow C_1=4$.

Vậy khi $x\ge 1$ thì

$$f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+4\Rightarrow f(2)+f(4)=12.$$

Câu 5. (ĐỀ CHÍNH THỨC BGD 2020-2021 LẦN 2 MĐ 102) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC như hình bên dưới

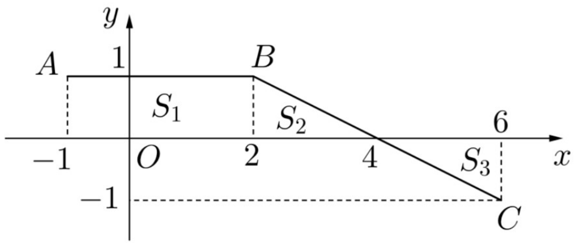


Biết F là nguyên hàm của f thoả mãn $F(-1)=-2$. Giá trị của $F(4)+F(6)$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D



Theo hình vẽ ta có

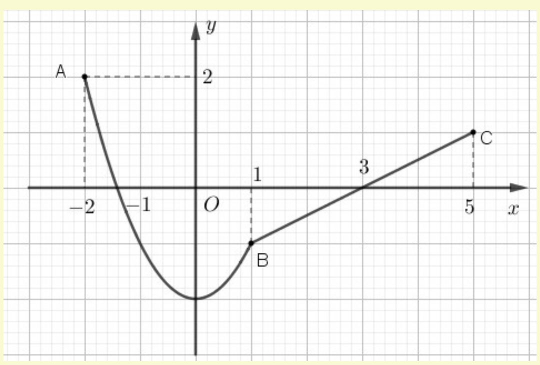
$F(6)-F(-1)=\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x = S_1+S_2-S_3$

$=3.1+\frac{1}{2}.2.1-\frac{1}{2}.2.1=3$. Suy ra $F(6)=3+F(-1)=1$.

$F(4)-F(-1)=\int_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = S_1+S_2=3.1+\frac{1}{2}.2.1=4$. Suy ra $F(4)=4+F(-1)=2$.

Vậy $F(4)+F(6)=2+1=3.$

Câu 6. **(Phát triển câu 40-Mã đề 120-Đề TN THPT 2021-Đợt 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trrên đoạn $[-2;5]$ và có đồ thị như hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-2)=2$. Giá trị của $F(3)+F(5)$ bằng



A. 3. **B.** -3. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $f(x)$ ta xác định được công thức $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & khi \ -2\le x<1 \\ \frac{1}{2}x-\frac{3}{2} & khi \ 1\le x\le 5 \end{cases}$.

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}-2x+c_1 & khi \ -2\le x<1 \\ \frac{x^2}{4}-\frac{3}{2}x+c_2 & khi \ 1\le x\le 5 \end{cases}$.

Mà $F(-2)=2 \Leftrightarrow -\frac{8}{3}+4+c_1=2 \Leftrightarrow c_1=\frac{2}{3}$.

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ mà $f(x)$ liên tục trên $[-2;5]$ nên $F(x)$ liên tục trên $[-2;5]$, suy ra $F(x)$ liên tục tại $x=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) \Leftrightarrow -\frac{5}{4}+c_2=-\frac{5}{3}+c_1 \Leftrightarrow c_2=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{4} \Rightarrow c_2=\frac{1}{4}$.

Do đó $F\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-2x+\dfrac{2}{3} & khi\quad -2\le x<1\\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4} & khi\quad 1\le x\le 5\end{cases}$.

Vậy $F\left(3\right)+F\left(5\right)=-2+\left(-1\right)=-3$.